MOTO TRASLAZIONALE E ROTAZIONALE:

Centro di Massa:

Un corpo esteso non può genericamente utilizzare le stesse leggi della meccanica definite per un punto; tuttavia, il movimento di un corpo rigido è essenzialmente paragonabile al movimento di un punto particolare, il centro di massa, a cui sono applicabili tutte le leggi descritte per il punto.

La definizione formale della posizione del centro di massa rispetto ad un sistema di coordinate *xy* è il vettore r così descritto:

$$\mathbf{r}_{\text{centro di massa}} = \left(\int_{\text{massa}} \mathbf{r} * dm\right) / \left(\int_{\text{massa}} dm\right) =$$

$$= \left(\int_{\text{volume}} \mathbf{r} * \rho_{\text{massa}} * dV\right) / \left(\int_{\text{volume}} \rho_{\text{massa}} * dV\right)$$

dove ρ_{massa} è la funzione che esprime la distribuzione della massa nel corpo (densità di massa).

Spesso non è necessario ricorrere a queste definizioni formali, ma è sufficiente ragionare sulla geometria del problema e sulla distribuzione della massa all'interno dello stesso; se un cilindro, ad esempio, ha una densità che varia lungo l'altezza, necessariamente il centro di massa sarà sull'asse del cilindro per evidenti motivi geometrici (la distribuzione della massa dall'asse è sempre uniforme), ma ad un'altezza diversa dal centro geometrico. Non è quindi necessario risolvere due integrali di volume, ma due più semplici integrali di linea.

Generalmente, per trovare rispondenze di simmetria, è utile immaginare il corpo in tanti elementini di volume dV (o dS se bidimensionale) in base alla simmetria del corpo:

Simmetria cilindrica: è possibile immaginare il corpo come tanti gusci cilindrici di uguale altezza concentrici con raggio variabile *dr (invarianza traslazionale e rotazionale lungo l'asse, ma NON radiale).*

Simmetria sferica: è possibile immaginare il corpo come tanti gusci sferici concentrici con il raggio che varia in maniera lineare *dr (invarianza rotazionale in due direzioni, ma NON radiale).*

Simmetria piana: è possibile immaginare il corpo come tante superfici di altezza infinitesima *dh* tutti uguali posti uno sopra all'altro *(invarianza radiale, ma non assiale)*.

Simmetria circolare: è possibile immaginare il corpo come tanti cerchi concentrici di raggio *dr (invarianza rotazionale lungo una direzione angolare, ma non radiale).*

Ragionando sulle varie simmetrie interne al corpo è possibile semplificare notevolmente gli integrali di volume.

Se il corpo presenta delle **cavità**, è possibile immaginare le cavità come elementi di massa ***negativa*** *(anche se non ha un significato fisico)*: pertanto il corpo diverrà un sistema composto da due corpi: uno, il corpo reale, considerato *come se non avesse cavità,* e l'altro la cavità, considerato come un corpo di *massa negativa* con il volume della cavità, la posizione della cavità e la densità di massa del corpo iniziale *(rispetto allo stesso asse, ad esempio: se la densità varia radialmente, e la cavità non è centrata, bisogna considerare la funzione densità di massa come calcolata attorno all'asse del CORPO, e non della cavità).*

In un sistema di corpi il centro di massa è calcolato considerando i corpi come punti materiali posti nei rispettivi centri di massa con massa equivalente al corpo che rappresentano.

Quantità di Moto (o Momento Lineare):

La quantità di moto *(p)* è una grandezza **vettoriale**, e la sua definizione formale è:

$$p = m * V$$

dove *v* è il vettore velocità del punto in questione.
In realtà, applicando quesa definizione a corpi estesi, si hanno dei problemi di carattere concettuale, come ad esempio dove è applicata *p*, pertanto è impossibile da applicare sempre alla lettera. Entra in gioco quindi la definizione di **centro di massa**, che permette di applicare la quantità di moto a un qualunque corpo:

$$p = M * V_{\text{centro di massa}}$$

dove *M* è la massa totale del sistema (o corpo) e *V* la velocità del centro di massa del sistema (o corpo).

È importante notare che essendo una grandezza vettoriale, *p* *(nel piano, N.B.)* **ha sempre due componenti *x* ed *y*: pertanto è possibile che un corpo abbia una quantità di moto nulla lungo un asse o l'altro, in stretta relazione al vettore velocità assegnato al corpo in questione. Inoltre è sempre possibile scomporre *p* lungo i due assi, consentendo una migliore comprensione di eventuali urti** *(in cui la quantità di moto gioca un ruolo fondamentale).*

Tramite passaggi matematici, è possibile arrivare ad un'altra definizione matematica, che permette di capirne meglio numerosi aspetti e dare un applicazione pratica della quantità di moto (sua variazione):

$$\Delta \mathbf{p} = \int \Sigma \, \mathbf{F} \; * \; d\,t$$

dove gli estremi d'integrazione sono t_0 e t_1, cioè l'istante iniziale e l'istante finale in cui vogliamo misurare la variazione della quantità di moto *(N.B.: **p** ed **F** sono **vettori**).*

Da questa definizione è possibile trarre le seguenti conclusioni:

1_ Le forze interne di un corpo o di un sistema non concorrono a modificare la quantità di moto.

2_ Se un corpo od un sistema è **isolato** *(cioè la somma delle forze è nulla)* lungo una **direzione**, la quantità di moto in quella direzione **si conserva**, cioè non si ha variazione di *p.*

3_ Se consideriamo intervalli di tempo molto piccoli (ad esempio, subito prima e subito dopo un urto), le forze **impulsive** sono le uniche che modificano **significativamente** la quantità di moto (le forze **non** impulsive sono le forze **costanti**, come può essere la forza di gravità, la forza elettrica e la forza magnetica).

Sul terzo punto è opportuno approfondire: l'integrale della quantità di moto è scomponibile infatti:

$$\Delta \mathbf{p} = \left(\int \Sigma \, \mathbf{F}_{\text{impulsive}} \; * \; d\,t\right) \quad + \quad \left(\int \Sigma \, \mathbf{F}_{\text{non impulsive}} \; * \; d\,t\right)$$

dato che l'intervallo di tempo è molto piccolo, il contributo dato dal secondo integrale diventa quasi nullo, e dato che le forze impulsive variano molto velocemente, si può considerare la sommatoria delle forze impulsive mediata nel tempo per ottenere un'equazione approssimativa di un urto:

$$\Delta \mathbf{p} = \langle \mathbf{F} \rangle * \Delta\, t$$

dove $\langle F \rangle$ è appunto la forza media che agisce durante l'urto.

Urti Elastici ed Anelastici:

L'urto è un processo di cui tutti siamo a conoscenza, e ne esistono essenzialmente due tipi: li urti *elastici* e gli urti *anelastici.* La differenza sostanziale sta nel fatto che negli urti elastici si conserva l'energia cinetica, mentre negli urti anelastici no. In particolare, è possibile dire che negli urti elastici l'energia cinetica *non ha il tempo* di trasformarsi in altri tipi di energia, e pertanto rimane sottoforma di E_k.

Si possono fare due esempi di urto: un urto elastico è un pallone da basket ben gonfio che rimbalza contro una parete, mentre un urto anelastico è un chewing-gum che una volta lanciato si attacca ad un muro.

Per risolvere un problema concerne ad un urto, solitamente è sufficiente scrivere un'equazione di bilancio energetico che tenga conto del tipo di urto e un'equazione per la quantità di moto, che tenga conto di eventuali conservazioni.

N.B.: in un urto **isolato** *p* si conserva **sempre vettorialmente** (somma di $p_x + p_y$).

Frammentazioni:

Le frammentazioni sono processi fisici in cui un corpo, a causa di *forze interne*, si separa in più parti. Questi possono essere visti come *urti anelastici*, se "invertiamo il senso del tempo". E' pertanto possibile trattare le frammentazioni come sistemi isolati, con le stesse debite considerazioni di un urto anelastico, dove l'unica cosa che cambia è il senso del tempo.

Moto Rotazionale:

Il moto rotazionale è una caratteristica dei corpi estesi: essi possono "ruotare" attorno ad un punto, detto **polo**, se imperniati e se su di essi agisce una qualche forza. Le equazioni che descrivono il moto rotazionale sono sostanzialmente le stesse del moto traslazionale, dove però è necessario utilizzare il prodotto vettoriale e grandezze diverse; il prodotto vettoriale è un prodotto tra due vettori, e il risultato è un vettore al piano che li contiene con il verso definito dalla regola della mano destra, e il suo modulo è

$$c = a \times b = |a| * |b| * \sin \alpha$$

dove α è l'angolo compreso tra i due vettori.

Le grandezze da utilizzare nel moto rotazionale sono:

θ(vettore): è l'angolo che viene coperto in un dato movimento (analogo: posizione).

ω(vettore): è la derivata rispetto al tempo dell'angolo coperto, e viene espressa con un vettore ortogonale alla rotazione e con verso (segno) positivo per rotazioni antiorarie (vettore uscente dal piano di rotazione rispetto all'osservatore), negativo per rotazioni orarie (vettore entrante nel piano di rotazione) (analogo: velocità).

α(vettore): è la derivata seconda dell'angolo coperto; si applicano le stesse considerazioni di ω (analogo: accelerazione).

Per "quantificare" la lunghezza di uno spostamento angolare esiste una semplice equazione che lega lunghezza ed angolo coperto:

$$\Delta s = r * \Delta \theta$$

Sono valide inoltre le seguenti relazioni tra velocità tangenziale, accelerazione tangenziale (non centripeta!), ω ed α (tutte le relazioni sono **vettoriali, e i prodotti sono vettoriali**):

$$V = \omega \times r \qquad a = \alpha \times r$$

***I*(scalare):** è il momento d'inerzia; fisicamente esso è un tensore, ma per le rotazioni semplici può esser considerato uno scalare, e nella rotazione riveste il ruolo che ha massa nella traslazione (questa definizione è adeguata **solamente** per rotazioni attorno agli *"assi principali"*).

ζ(vettore): è il prodotto vettoriale tra il **raggio** (distanza tra polo e punto d'applicazione della forza) e la **forza applicata**. Il verso (segno) è definito come nella velocità angolare. Il suo modulo è anche scrivibile come il prodotto tra il **braccio** (distanza tra la retta di applicazione della forza ed il polo di rotazione) e il modulo della **forza**.

$$\zeta = r \times F = |r| * |F| * \sin \alpha = \text{braccio} * |F|$$

L'analogo nel moto traslazionale è la forza.

Dato che ζ è l'analogo della forza per il moto rotazionale, abbiamo tutte le grandezze per scrivere l'equivalente della seconda legge di Newton per il moto rotazionale (tramite un'**analogia**, sempre per le rotazioni attorno agli assi principali):

$$\zeta = I \times \alpha$$

Sempre per analogia discende l'equazione dell'energia cinetica rotazionale:

$$E_k = (I \times \omega^2) / 2$$

Momento d'Inerzia:

L'inerzia come già detto è un tensore, ma per rotazioni "semplici" può esser trattato come uno scalare; in particolare la definizione formale è

$$I = \int_{massa} (r^2) * dm = \int_{volume} (r^2) * \rho_{massa} * dV$$

dove r è chiaramente riferito rispetto al *polo di rotazione*, sempre.

N.B.: un corpo rigido è sempre scomponibile in più parti. Se conveniente, è possibile scomporre in più parti un corpo, ed assegnare ad ogni parte un momento d'inerza pari a

$$I = (r_{\text{centro di massa}}^2) * m$$

dove ovviamente *m* ed *r* sono riferiti alla parte di corpo interessata rispetto al polo di rotazione (in pratica consideriamo il contributo della parte del corpo in questione come quello di un punto materiale).
Esempio: ho un manubrio con due sfere alle estremità. Trovo il centro di massa del corpo, e mi calcolo i momenti d'inerzia rispetto al polo di rotazione delle due sfere e della sbarra che li unisce, poi sommo il tutto. Il risultato è il momento d'inerzia del corpo iniziale.

Teorema degli Assi Paralleli: considerando assi di rotazione "canonici", si possiede la seguente relazione per assi di rotazione paralleli ai canonici ma NON passanti per il centro di massa:

$$I = I_{cm} + M*(D^2)$$

Statica e corpi "appoggiati"/inchiodati:

Se in un corpo la verticale passante per il centro di massa cade al di fuori del perimetro su cui "poggia" esso non è in equilibrio rotazionale e inevitabilmente cade; questo perchè la reazione vincolare N è strettamente legata alla verticale: infatti è possibile prendere come polo di rotazione per l'equilibrio sul piano di appoggio il punto d'intersezione tra base di appoggio e verticale del centro di massa, e se il centro di massa è interno il braccio relativo alla forza di gravità è nullo.

Per ovviare a questo problema, è possibile inchiodare il corpo al pavimento, e quindi imprimergli un ζ che si oppone a quello generato dalla forza di gravità.

Momento Angolare:

Il momento angolare è l'equivalente della quantità di moto nelle rotazioni; la sua definizione formale **vettoriale** è:

$$\mathbf{L = r \times p = r \times (m*v) =} I \mathbf{*\omega}$$

di cui l'ultima equazione ω è un vettore, ed è vera unicamente per gli assi di rotazione principali.

Una definizione che permette di capire alcune proprietà del momento angolare è:

$$\Delta L = \int \Sigma \zeta * dt$$

dove gli estremi d'integrazione sono t_0 e t_1, cioè l'istante iniziale e l'istante finale in cui vogliamo misurare la variazione della quantità di moto *(N.B.: **p** ed **F** sono **vettori**).*

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti sulla quantità di moto, si giunge alle stesse conclusioni, e cioè che il momento angolare:

1_ I $\zeta_{interni}$ **non** modificano il momento angolare.

1_ Se la sommatoria dei $\zeta_{esterni}$ è nulla, il momento angolare **si conserva**.

2_ Durante gli urti, gli unici ζ che modificano il momento angolare sono quelli dovuti a **forze impulsive**.

Sul punto 2 è necessaria una precisazione: **non** è necessario che sul sistema **non agisca nessuna forza** affinchè il momeno angolare si conservi: infatti è possibile che su un corpo agiscano **più forze**, ma la somma dei loro $\zeta_{esterni}$ risulti **nulla**, e quindi L si conserva.

Rotolamento puro:

Un moto di rotolamento **puro** è un moto di un corpo cui è associato sia un movimento traslazionale sia un movimento rotazionale **senza che esso "strisci"** sulla superficie di contatto; per risolvere esercizi di rotolamento, spesso è sufficiente scrivere un'equazione di bilancio energetico e mettere in relazione la velocità traslazionale con qulla rotazionale:

$$V_{\text{centro di massa}} = R * \omega$$

N.B.: nell'equazione di bilancio energetico occorre tenere di conto della $E_{k\ \text{rotazionale}}$, $E_{k\ \text{traslazionale}}$, e dell'energia potenziale del corpo.

Moto Traslazionale e Rotazionale a confronto:

Traslazionale:

$$F = m * a_{\text{centro di massa}} = dp / dt \qquad p = m * V_{\text{centro di massa}}$$

$$\Delta E_k = (m * (V^2)) / 2 \qquad \Delta p = \int \Sigma F * dt$$

$$V_{\text{centro di massa}}(t) = (d X_{\text{centro di massa}}) / dt = V_0 + a_{cm} * t$$

$$a_{\text{centro di massa}}(t) = (d V_{\text{centro di massa}}) / dt$$

$$X_{\text{centro di massa}}(t) = X_0 + V_0 * t + a_{cm} * (t^2) * 1/2$$

Moto circolare:

$$a_{cm\ \text{centripeta}} = (\omega^2) * R$$

$$V_{cm\ \text{tangenziale}} = \omega * R$$

$$\alpha_{cm}(t) = d\omega / dt$$

$$\omega_{cm}(t) = d\theta / dt = \omega_0 + \alpha_{cm} * t$$

$$\theta_{\text{centro di massa}}(t) = \theta_0 + \omega_0 * t + \alpha_{cm} * (t^2) * 1/2$$

Moto armonico:

$$X_{\text{centro di massa}}(t) = A * \cos(\omega * t + \varphi)$$

$$V_{\text{centro di massa}}(t) = -A * \omega * \sin(\omega * t + \varphi)$$

$$a_{\text{centro di massa}}(t) = -A * \omega^2 * \sin(\omega * t + \varphi)$$

Rotazionale:

$$\zeta = r \times F = |r| * |F| * \sin \alpha = \text{braccio} * |F| = I \times \alpha$$

$$L = r \times p = r \times (m * v) = I * \omega$$

$$\Delta L = \int \Sigma \zeta * dt$$

$$E_k = (I \times \omega^2) / 2$$

<u>Considerazioni energetiche e formule utili</u>:

Lavoro = variazione di energia cinetica

Lavoro forze conservative = -1 * variazione energia potenziale

Lavoro forze NON conservative = variazione di energia meccanica

$L = \int F * dS$ estremi d'integrazione: A (punto iniziale) e B (punto finale)

$\Delta E_{k\ molla} = - k * x^2$ **$T_{pendolo} = 2 * \pi *$ radq(l / g)**