

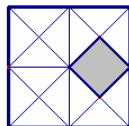


**IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE LA RIOJA**  
1ª FASE NIVEL III      Día 28 de Febrero de 2007



- 1.-  $O$  es el centro de un cuadrado de lado 4 cm y  $M$  el punto medio de un lado. ¿Cuál es el área, en  $\text{cm}^2$ , del cuadrado de diagonal  $OM$ ?

A) 2       B)  $2\sqrt{2}$        C) 4       D)  $4\sqrt{2}$        E) 8



Si unimos los puntos medios de los lados del cuadrado (todos con todos) se forma una red de 16 triángulos iguales. El cuadrado cuya área buscas está formado por dos de estos triángulos, luego su área es la octava parte del cuadrado inicial. Si  $l=4$ ,  $S=16$  luego el área buscada es  $2\text{cm}^2$

- 2.- Al comprar unas deportivas nos hacen un 15 % de descuento y así ahorramos 9 €. ¿Cuántos euros hemos pagado por ellas?

A) 60       B) 54       C) 51       D) 50       E) 48

Si el 15% de  $x = 9 \text{ €}$ ,  $\frac{15}{100}x = 9$  de donde:  $x = \frac{9 \cdot 100}{15} = 60$  y por lo tanto lo pagado =  $60 - 9 = 51 \text{ €}$

- 3.- Siete cruasanes pesan lo mismo que cuatro ensaimadas y cinco palmeras pesan lo mismo que seis ensaimadas. Si  $c$ ,  $e$  y  $p$  representan los pesos, en gramos, de un cruasán, una ensaimada y una palmera, respectivamente, entonces:

A)  $c < p < e$      B)  $c < e < p$      C)  $e < c < p$      D)  $e < p < c$      E)  $p < c < e$

$7c = 4e$  luego  $c < e$ ;  $5p = 6e$  luego  $e < p$  y enlazando las dos desigualdades:  $c < e < p$

- 4.- El número de matrícula del coche de Pedro es de 4 cifras pero no es muy difícil de recordar, pues es de la forma  $abba$  con  $a$  y  $b$  distintos y  $ab$  y  $ba$  números primos de dos cifras. ¿Cuántos números podrían ser los números de matrícula del coche de Pedro?

A) 4       B) 6       C) 8       D) 10       E) 12

Los números  $a$  y  $b$  tienen que ser impares y distintos de 5. Vamos probando y tenemos 13 y 31, 17 y 71, 37 y 73, 79 y 97. En total 8

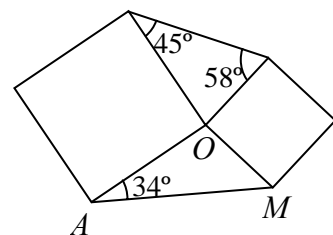
- 5.- En un tablero  $10 \times 10$  escribimos por columnas las tablas de multiplicar del 1 al 10. En la primera columna están los números del 1 al 10, en la segunda del 2 al 20, ..., en la décima del 10 al 100. ¿Cuánto suman todos los números del tablero?

A) 770       B) 1000       C) 2250       D) 2625       E) 3025

De la primera columna tenemos  $1+2+3+4+\dots+10 = 55$  De la segunda tenemos  $2+4+6+\dots+20=2(1+2+3+\dots+10)=2 \cdot 55$ ; y así sucesivamente. Para sumarlas todas:  $55 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + \dots + 10 \cdot 55 = 55(1+2+3+\dots+10)=55 \cdot 55 = 3025$

- 6.- La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo  $\hat{A}MO$  mide:

A)  $43^\circ$        B)  $39^\circ$        C)  $38^\circ$        D)  $36^\circ$        E)  $35^\circ$



El ángulo que no nos dan en el triángulo superior mide:  $180^\circ - (45^\circ + 58^\circ) = 77^\circ$ . Del triángulo inferior el ángulo con vértice en  $O$  mide:  $360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 77^\circ) = 103$  luego el  $AMO = 180 - (34 + 103) = 43^\circ$

7.- Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos y sólo dos caras seguidas?

- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{2}{3}$       E)  $\frac{3}{4}$

Si escribimos todos los resultados posibles: ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx. vemos que "dos y solo dos caras" salen dos veces de 8. La probabilidad buscada es:  $2/8 = 1/4$

8.- Designamos por  $n!$ , donde  $n$  es natural, al producto  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ . Así por ejemplo:  $5! = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ . ¿Cuál es la última cifra de  $20!$  que no es cero?

- A) 2      B) 4      C) 5      D) 6      E) 8

Los ceros finales son producidos por todas las veces que aparece como factor el 10 o  $2 \times 5$ , escribiremos la lista de factores sin estos factores:  $1 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 \times 12 \times 13 \times 7 \times 3 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 2$  (en lugar de  $14 \times 15$  he puesto  $7 \times 3$  para quitar un factor 10). De este producto solo me interesa la cifra de las unidades del producto acumulado: 1, 3, 2, 2, 4, 2, 8, 8, 6, 8, 6, 8, 8, 6, 8, 2, 4

9.- Numeramos los ocho vértices de un cubo desde el 1 al 8, de manera que los números correspondientes a los vértices de cada una de las seis caras son: [1,2,6,7] [1,4,6,8], [1,2,5,8], [2,3,5,7], [3,4,6,7] y [3,4,5,8]. El vértice marcado con el 6 es el más lejano al marcado con:

- A) 1      B) 3      C) 4      D) 5      E) 7

El vértice más lejano al vértice 6 es el único punto que no pertenece a ninguna de las caras que contienen a ese vértice. Los puntos de las caras que contienen al vértice 6 son: 1, 2, 7, 4, 8, 3 y el único que falta es el 5

10.-  $98561^2 + 98569^2 - 2 \times 98565^2$  es igual a:

- A) 32      B) 82      C) 100      D) 2      E) 98562

Observamos que esta expresión es igual que :  $(a - 4)^2 + (a + 4)^2 - 2a^2$  donde  $a = 98565$ , pero si desarrollamos ahora queda:  $a^2 - 8a + 16 + a^2 + 8a + 16 - 2a^2 = 32$

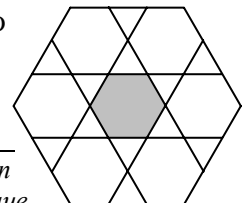
11.- El entero positivo  $N$  tiene exactamente seis divisores, incluyendo 1 y  $N$ . Si el producto de cinco de ellos es 648, ¿qué entero de los siguientes tiene que ser el otro divisor de  $N$ ?

- A) 4      B) 9      C) 12      D) 16      E) 24

$648 = 2^3 \cdot 3^4$   $N$  solo puede tener a 2 y 3 como factores primos (porque en 648 todos los factores primos de  $N$  tienen que aparecer al menos una vez)  $N$  tiene que ser de la forma  $2^m \cdot 3^n$  luego puede ser **2, 3, 12, 18, 24, 36, ...** Pero los marcados en negrita no pueden ser, los primeros porque tienen menos de 6 divisores y los últimos por tener más de 6. Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12 que multiplicados dan 1728 que no es divisible por 648 y los de 18 son 1, 2, 3, 6, 9, 18 que multiplicados dan 5832 y que divididos por 648 dan 9 que es el factor que faltaba

12.- Si el hexágono grande de la figura tiene  $180 \text{ cm}^2$  de área, el área del hexágono central sombreado, en  $\text{cm}^2$ , es:

- A) 15      B) 18      C) 20      D) 30      E) 36



Cada hexágono pequeño se puede dividir en 6 triángulos equiláteros iguales que los que aparecen en la figura. El hexágono grande tiene 7 hexágonos pequeños y 12 triángulos equiláteros (que equivalen a 2 hexágonos pequeños). Si el grande mide como 9 pequeños, cada uno de éstos medirá  $180:9 = 20 \text{ cm}^2$

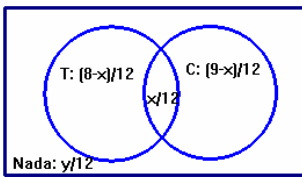
13.- En una bolsa hay dos bolas rojas y dos azules. Se extraen dos bolas sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{2}{3}$       E)  $\frac{3}{4}$

Los casos posibles son RR, RA, AR, AA la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es  $2/4 = 1/2$

14.- En una reunión, a dos tercios de los asistentes les gusta el teatro y a tres cuartos de ellos les gusta el cine. ¿Cuál es la proporción mínima de los que les gusta el cine y el teatro?

- A)  $\frac{1}{12}$       B)  $\frac{5}{12}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{8}{9}$       E)  $\frac{5}{7}$



De cada 12 personas, hay 8 que les gusta el teatro, hay 9 a las que les gusta el cine. Si llamamos  $x$  a las que les gustan las dos cosas e  $y$  a las que no les gusta ninguna, tenemos que las proporciones son:

A los  $\frac{8-x}{12}$  les gusta solo el teatro, a los  $\frac{x}{12}$  les gustan las dos cosas, a los  $\frac{9-x}{12}$  les gusta solo el cine y a los  $\frac{y}{12}$  no les gusta nada. Entonces,

$$\frac{8-x}{12} + \frac{x}{12} + \frac{9-x}{12} + \frac{y}{12} = \frac{12}{12} \text{ de donde obtenemos que } -x \leq -5y, \text{ por lo tanto } x \geq 5y, \text{ luego la proporción es } 5/12$$

15.- En un recorrido de 6 km quiero hacer una media de 5 km/h, pero en los tres primeros kilómetros mi media sólo ha sido de 4 km/h. ¿Cuál ha de ser la media en km/min de los últimos 3 km para poder conseguir mi objetivo?

- A)  $\frac{1}{8}$       B)  $\frac{1}{9}$       C)  $\frac{1}{10}$       D)  $\frac{1}{11}$       E)  $\frac{1}{12}$

6 km a 5 Km/h se recorren en  $t_1 = 6/5 = 1'2$  horas. Si los tres primeros ...3 Km a 4 Km/h se recorren en  $t_2 = 3/4 = 0'75$  horas para los otros tres Km tenemos que emplear  $1'2 - 0'75 = 0'45$  horas =  $0'45 \times 60 = 27$  minutos, a una velocidad de  $3/27$  Km/min =  $1/9$  Km/min.

16.- Amparo le dijo a su nieto David: “Durante seis años seguidos mi edad ha sido un múltiplo de la tuya, pero este año ya no ha ocurrido eso”. Cuando ocurra de nuevo que la edad de Amparo sea múltiplo de la de David, ¿cuánto será la suma de sus edades?

- A) 65      B) 68      C) 70      D) 76      E) 80

Necesitamos hacer una lista de números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, , ... Durante seis años seguidos la abuela tiene edades múltiplos de las edades del nieto luego se trata de al menos seis números compuestos consecutivos (o 5 si el primero de los seis años del nieto fuera 1) : pueden ser : 23-24-25-26-27-28 que no vale porque tendría que considerar 23 múltiplo de 1, 24 de 2, 25 de 3 ...pero no lo es. 31-32-33-34-35-36 pero no porque 34 no es múlt. de 4. 47-48-49-50-51-52 pero no vale porque 47 no es múlt. de 2. 53-54-55-56-57-58 tampoco porque 55 no es múlt de 3. 61-62-63-64-65-66 si es solución: él tiene 7 y ella 67 y el año que viene sumarán 76 años. (Es fácil ver que 73—79 y 83—89 tampoco son periodos válidos.)

17.- En otra reunión, exactamente el 76 % de los asistentes lleva móvil. ¿Cuál es el menor número posible de asistentes?

- A) 14      B) 19      **C) 25**      D) 48      E) 52

Si llevan móvil ( $m$ ) el 76% del total ( $t$ ),  $m = \frac{76}{100}t$  entonces,  $t = \frac{100}{76}m = \frac{25m}{19}$ . Para que el resultado de esta operación sea un número natural,  $m$  tiene que ser un múltiplo de 19 y el más pequeño es el propio 19, por lo que  $t \geq 25$

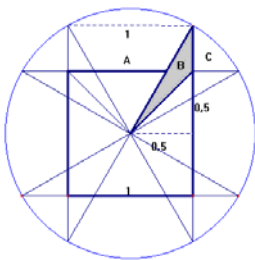
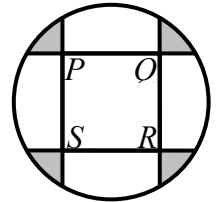
18.- La compra en un súper sale un 12 % de media más barata. Alberto va al súper sólo si ahorra al menos 15 euros (para compensar tiempo y gastos de desplazamiento). ¿Cuál debe ser en ese caso el precio mínimo, en euros, de su compra en el súper?

- A) 100      B) 110      **C) 115**      D) 120      E) 125

Una compra de  $C$  € en la tienda, le cuesta en el súper  $0,88C+15$  que para que la compra le resulte rentable ha de ser menor que  $C$ :  $0,88C+15 < C$ , de donde,  $C > 15/0,12 = 125$ € que en el súper cuesta:  $125 \times 0,88 = 110$ €

19.- El cuadrado  $PQRS$  de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en  $m^2$ , el área de la región sombreada?

- A)  $\frac{\pi}{3}$       B)  $\frac{\pi - \sqrt{3}}{3}$       C)  $\sqrt{3} - 1$       D)  $\frac{\pi - 1}{3}$       **E)  $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$**



El área de la zona sombreada  $C$ , verifica que: Todo el círculo =  $4A + 8B + 4C$   
 $A$  es un sector circular cuyo ángulo mide  $60^\circ$  y su área es la  $6^a$  parte del círculo:  $\pi/6$ , Si en  $A$  trazamos la cuerda dibujada se nos forma un triángulo equilátero de lado 1 y si aplicamos el Teorema de Pitágoras podemos obtener su altura:  $h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  El triángulo  $B$  (mirado de lado) tiene altura 0,5 y base  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$  Su área:  
 $B = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{8}$ . Si volvemos a la primera expresión y despejamos

$$4C = \pi - \frac{4\pi}{6} - 8 \frac{\sqrt{3} - 1}{8} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$$

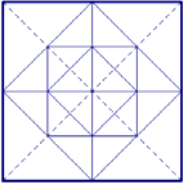
20.- Si  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{7}{4}$ , ¿cuánto vale  $\frac{a^2}{b^2}$ ?

- A)  $\frac{11}{3}$       **B)  $\frac{121}{9}$**       C)  $\frac{121}{16}$       D)  $\frac{49}{9}$       E)  $\frac{49}{16}$

Es claro que  $4a + 4b = 7a - 7b$  luego  $11b = 3a$ , de donde  $a/b = 11/3$  y, por lo tanto,  $a^2/b^2 = 121/9$

21.- Consideremos un cuadrado de lado 4 cm. Al unir los puntos medios de sus lados obtenemos un segundo cuadrado y si continuamos así, uniendo los puntos medios de los lados de cada cuadrado dibujado, obtenemos un nuevo cuadrado. ¿Cuál es, en cm, la longitud del lado del cuadrado número 12?

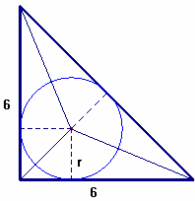
- A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{8}$       C)  $\frac{1}{16}$       **D)  $\frac{1}{8\sqrt{2}}$**       E)  $\frac{1}{16\sqrt{2}}$



$L_1 = 4$ . Si aplicamos el T de Pitágoras, vemos que  $L_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . Observando la figura vemos que  $L_3 = 2$  y análogamente al caso anterior vemos que  $L_4 = \sqrt{2}$ ,  $L_5 = 1$ , ... vemos que los términos impares se van reduciendo cada uno es la mitad del anterior y los pares se obtienen multiplicando a la mitad del anterior por  $\sqrt{2}$ . Así tendremos que  $L_7 = 1/2$ ,  $L_9 = 1/2^2$ ,  $L_{11} = 1/2^3 = 1/8$  y  $L_{12} = \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$

22.- En el interior de un triángulo rectángulo isósceles de 6 cm de cateto, dibujamos una circunferencia tangente a sus tres lados. ¿Cuál es, en cm, el radio de esta circunferencia?

- A)  $3\sqrt{2}$       B)  $2\sqrt{3}$       **C)  $6 - 3\sqrt{2}$**       D)  $\frac{3}{2}$       E) 3

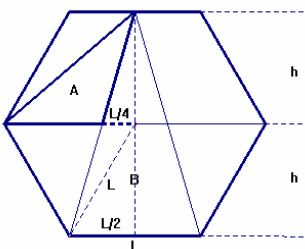
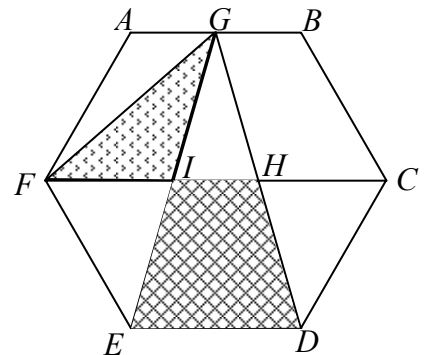


La hipotenusa de este triángulo mide  $\sqrt{36 + 36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$   
 El área la vamos a calcular de dos maneras distintas:  $S = 1/2$  de la base  $\times$  la altura =  $18 \text{ cm}^2$   
 Pero también se puede calcular como suma de tres triángulos que tienen por base a los respectivos lados y por altura al radio  $r$  de la circunferencia inscrita:

$$S = \frac{6r}{2} + \frac{6r}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2} r = (6 + 3\sqrt{2}) r = 18 \text{ luego } r = \frac{18}{6 + 3\sqrt{2}} = \frac{6}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 6 - 3\sqrt{2}$$

23.- En el hexágono regular  $ABCDEF$  de la figura,  $G$  es el punto medio del lado  $AB$ . ¿Cuál es el cociente entre el área del trapecio  $EDHI$  y el triángulo  $FIG$ ?

- A) 2**      B) 3      C)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$       D)  $\sqrt{3}$       E)  $\sqrt{2}$



Los lados del hexágono miden lo mismo que sus radios. La altura  $h$  se obtiene aplicando el T de Pitágoras al triángulo rectángulo de base  $L/2$  y lado

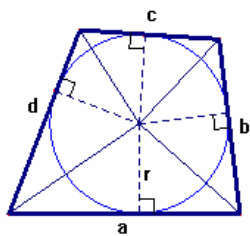
$$L: h = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$A$  es un triángulo de base  $L - L/4 = 3L/4$  y de altura  $h$ . Su área:

$$S_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3L}{4} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{16}$$

$B$  es un trapecio de bases  $L$  y  $L/2$  y de altura  $h$ . Su área:  $S_B = \frac{L + \frac{L}{2}}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{8}$  Queda claro que  $S_B = 2 \cdot S_A$  luego el cociente es 2

24.- Si el cociente entre el perímetro de un cuadrilátero en el que se pueda inscribir una circunferencia y la longitud de la circunferencia inscrita en él es  $\frac{4}{3}$ , ¿cuál es el cociente entre el área de dicho cuadrilátero y el área del círculo?



- A)  $\frac{4}{\pi}$       B)  $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$       C)  $\frac{16}{9}$       D)  $\frac{\pi}{3}$       E)  $\frac{4}{3}$

En la figura vemos que el área del cuadrilátero se puede obtener sumando las áreas de cuatro triángulos cuyas bases son los lados del cuadrilátero y cuyas alturas son todas iguales al radio de la circunferencia inscrita:

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c+d}{2}r = \frac{P}{2}r \text{ Sabemos que } \frac{P}{L} = k \Rightarrow P = kL = 2k\pi r ;$$

entonces si S es el área del cuadrilátero y C la del círculo: 
$$\frac{S}{C} = \frac{\frac{P}{2}r}{\pi r^2} = \frac{k\pi r^2}{\pi r^2} = k$$

25.- El entero positivo 1 tiene la propiedad de ser un cuadrado perfecto y al sumarle 99 también resulta ser un cuadrado perfecto. Además del 1, ¿cuántos enteros positivos tienen esa propiedad?

- A) 0      B) 1      **C) 2**      D) 48      E) 98

Nos dicen que busquemos un número natural  $k (\neq 1)$  tal que  $k^2 + 99 = m^2$  donde  $m$  es otro número natural. Luego se verifica que:  $m^2 - k^2 = 99 = 3^2 \cdot 11$ , pero  $m^2 - k^2 = (m+k)(m-k)$  de donde obtenemos:

1.-  $m+k=11$  y  $m-k=9$  que resolviendo nos da  $m=10, k=1$  que era el ejemplo que nos daban

2.-  $m+k=33$  y  $m-k=3$  “  $m=18, k=15$

3.-  $m+k=99$  y  $m-k=1$  “  $m=50, k=49$

luego además de la dada como ejemplo tenemos dos soluciones.