IX CONCURSO DE PRIMAVERA DE LA RIOJA

1ª FASE NIVEL IV **Día 28 de Febrero de 2007**

1.- Se tira una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan exactamente dos caras seguidas?

$\boxed{\textbf{A) } \frac{1}{4}}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

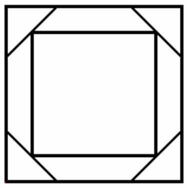
Los casos posibles son: CCC, <u>CCX</u>, CXC, <u>XCC</u>, CXX, XCX, XXC, XXX. La probabilidad que nos piden es 2/8 = 1/4

2.- ¿Cuál es la altura menor de un punto de la gráfica de la función?
$y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$?

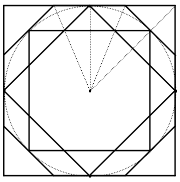
A) 4 **B)** 5 $\boxed{\textbf{C) } 6}$ **D)** 7 **E)** 10

Se trata de una función "definida a trozos" que en cada uno de ellos se expresa mediante una función polinómica de primer grado. Si x<1, f(x)=15-5x que es decreciente y su mínimo se alcanza en x=1 y vale f(1)=10. Si x>5, f(x)=5x−15 que es creciente y su mínimo se alcanza en x=5 y vale f(5)=10. Por otra parte, en cada uno de los "trozos" su mínimo se alcanzará en el extremo inferior o en el superior, por eso basta con calcular f(1)=10, f(2)=7, f(3)=6, f(4)=7, f(5)=10. El menor valor que alcanza es 6.

3.- En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es 48 cm^2, el área del pequeño, en cm^2, es:



A) 40 **B)** 36 **C)** 32 **D)** 28 $\boxed{\textbf{E) } 24}$



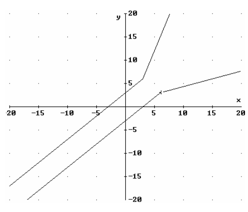
Todas las apotemas del octógono son iguales. Si construimos la circunferencia inscrita al octógono, vemos que su radio coincide con la mitad de la diagonal del cuadrado pequeño, eso nos permite girar el cuadrado 45º y ahora sus vértices coinciden con los puntos medios de los lados del cuadrado grande, por lo que su área mide la mitad de éste.

4.- La función inversa (o recíproca) de $y = |x-3| + 2x$ es:

A) $y = |x+3| + \frac{1}{2}x$ **B)** $y = \frac{2x-3}{3} + \left|\frac{x-6}{3}\right|$ $\boxed{\textbf{C) } y = \frac{2x-3}{3} - \frac{|x-6|}{3}}$

D) $y = \frac{|x+3|}{3} + x$ **E)** $y = x - \frac{|x-3|}{3}$

La función dada expresada a trozos: $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x<3 \\ 3x-3 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$. *Como f(3) = 6,*
Basta dibujarla y recordar que f y su inversa son simétricas respecto de y=x, para deducir que lu inversa será
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x<6 \\ \frac{1}{3}x+1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$
y la respuesta correcta es C porque cambia de zona en x = 6 (B y C) y para x < 6 solo la función C tiene pendiente 1



5.- Sabiendo que la suma de los n primeros cuadrados, $1^2+2^2+3^2+...+n^2$, es $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, entonces la suma de los diez primeros cuadrados pares, $2^2+4^2+6^2+...+20^2$ es:

A) 1444 $\boxed{\textbf{B)}\ 1540}$ **C)** 1556 **D)** 1596 **E)** 1616

$2^2+4^2+6^2+...20^2 = (2.1)^2+(2.2)^2+(2.3)^2+...(2.10)^2 = 4(1^2+2^2+3^2+...+10^2) = 4\dfrac{10.11.21}{6}=1540$

6.- Se tira un dado cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan cuatro números distintos?

$\boxed{\textbf{A)}\ \dfrac{5}{18}}$ **B)** $\dfrac{1}{54}$ **C)** $\dfrac{5}{108}$ **D)** $\dfrac{1}{144}$ **E)** $\dfrac{24}{216}$

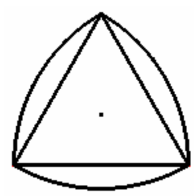
Queremos que en el primer lanzamiento se obtenga un número cualquiera, en el segundo uno distinto del anterior, y así, la probabilidad de que sean todos distintos es... $=1.\dfrac{5}{6}\dfrac{4}{6}\dfrac{3}{6}=\dfrac{5}{18}$

7.- ¿Cuál de los siguientes números no es raíz del polinomio z^4-5z^2-36?

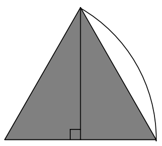
A) $2i$ $\boxed{\textbf{B)}\ 2_{180^o}}$ **C)** 2_{270^o} **D)** 3_{180^o} **E)** 3

Resolvemos la ecuación de 2º grado en z^2 y obtenemos: $z^2=\dfrac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\begin{cases}9\\-4\end{cases}$ *de donde se deduce que las soluciones son 3, -3 , 2, -2i que en forma polar son:* 3_0, 3_{180^o}, 2_{90^o}, 2_{270^o}. *Luego* 2_{180^o} *no es una solución*

8.- El triángulo curvilíneo de la figura, está formado por tres arcos de centro un vértice del triángulo equilátero y radio su lado, que mide 2 cm. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo curvilíneo?



A) $2\pi+\sqrt{3}$ **B)** $\pi+\sqrt{3}$ $\boxed{\textbf{C)}\ 2\left(\pi-\sqrt{3}\right)}$ **D)** $\pi-\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{3}-\pi$



La figura entera es un sector de amplitud 60º y su área mide la 6ª parte de un círculo de radio 2 : 2π/3. Si le restamos el área del triángulo equilátero (base 2 y altura $\sqrt{3}$ - por Pitágoras) obtenemos el área del segmento: $\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$ *. Finalmente, para calcular el área del triángulo curvilíneo sumamos el área del triángulo más la de tres segmentos:*
$\sqrt{3}+2\pi-3\sqrt{3}=2(\pi-\sqrt{3})$

9.- ¿Cuál de los siguientes números es primo?

A) 5^5+1 **B)** 6^7-1 **C)** $2^{18}+1$ **D)** $4^{16}-1$ $\boxed{\textbf{E)}\ 16^4+1}$

A) es compuesto porque las potencias de 5 acaban en 5. Si le sumamos 1 queda par.
B) es compuesto porque las potencias de 6 acaban en 6. Si le resto 1 queda un múltiplo de 5.
C) $2^{18}+1=4^9+1$ *compuesto porque toda potencia impar de 4 acaba en 4, si le sumamos 1 queda un múlt de 5*
D) $4^{16}-1=(4^8+1)(4^8-1)$ *luego es compuesto.* *No queda más remedio que marcar la E.*

10.- El valor mínimo de $f(x) = (x-5)^3 \cdot (x-1)$ es:

$\boxed{\textbf{A)}\ -27}$ **B)** -8 **C)** $-\frac{75}{8}$ **D)** -3 **E)** 0

Para hallar el mínimo igualamos la primera derivada a 0: $f'(x)= 3(x-5)^2(x-1) + (x-5)^3 = (x-5)^2[3(x-1)+(x-5)] = 4(x-5)^2(x-2) = 0$ luego tenemos dos posibles extremos: $f(5)=0$ y $f(2)=-27$

11.- La recta tangente a $y = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1,0), además de tocar a la curva en (1,0) la corta también en:

$\boxed{\textbf{A)}\ (0, 1)}$ **B)** (-1, -4) **C)** (2, 1) **D)** (3, 10) **E)** (-2, -11)

$y'(x) = 3x^2-4x$, luego la pendiente de la tangente en (1,0) es $m = y'(1) = -1$. La ecuación de la recta tangente será: $y-0 = -1(x-1)$, es decir, $y = -x+1$. Resolvemos el sistema que forma la función y la recta tangente:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

, se obtienen rápidamente dos soluciones x=1 (el punto de contacto con la tangente ya conocido) y x=0 que nos da el otro punto de contacto buscado: (0,1)

12.- ¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos $\boxed{\textbf{C)}\ \text{Tres}}$ **D)** Cuatro **E)** Cinco

*Cada mes que pasa sumamos al anterior 4 semanas "y pico". Empezando por Enero, estos "picos" son:
3, 0/1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2. (la expresión 0/1 se refiere a si el año no es /si es bisiesto)
Cuando los "picos" acumulados suman un múltiplo de siete se repite el día de la semana del día que empezamos a contar. Así, si empezamos un año con un martes y trece en Enero, los "picos" acumulados son:
3, 0/1, 3/4, 6/**7**, 8/9, 11/12, 13/14, 16/17, 19/20, **21**/22, 24/25, 26/27 que produce dos veces "martes y trece". Si hacemos otra vez lo mismo empezando con un "martes y 13" en Febrero tenemos una lista de acumulados: **0**, **0**/1, 3/4, 5/6, 8/9, 10/11, 13/**14**, 16/19, 18/19, **21**/22, 23/24 , que produce "martes y trece" en Febrero, Marzo y Noviembre (si el año no es bisiesto). Podemos seguir el mismo proceso comenzando en Marzo pero enseguida se ve que no se vuelven a alcanzar y menos a superar los tres "my13" en un año.*

13.- Consideremos las funciones $f(x) = x^2 + 2bx + 1$ y $g(x) = 2a(x+b)$ donde las constantes a y b son números reales. Cada par de constantes a y b puede considerarse como un punto de coordenadas (a, b) en el plano. Si S es el conjunto de puntos (a, b) para los que la gráfica de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no se cortan, el área de S es:

A) 1 $\boxed{\textbf{B)}\ \pi}$ **C)** 4 **D)** 4π **E)** Infinita

Las gráficas no se cortan si el sistema que forman sus ecuaciones no tiene solución: $x^2+2bx+1 = 2a(x+b)$ que da lugar a la ecuación de 2º grado: $x^2+2(b-a)x+1-2ab=0$. Si queremos imponer la condición de que no tenga solución, tendremos que hacer el discriminante sea <0 ; $\Delta=(b-a)^2-4(1-2ab)<0$ lo que nos lleva a la desigualdad: $a^2+b^2<1$. Los puntos del plano que solucionan ésta son los de un círculo de centro el origen y radio 1 cuya área es π.

14.- ¿Cuántos triángulos rectángulos distintos verifican que su perímetro, en cm, y su área, en cm^2, vienen dados por dos números iguales?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Cuatro $\boxed{\textbf{E)}\ \text{Infinitos}}$

Si los catetos son x e y, la hipotenusa será $\sqrt{x^2 + y^2}$ entonces: $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{xy}{2}$ que resolvemos aislando la raíz y elevando al cuadrado: $4(x^2+y^2)=x^2y^2+4x^2+4y^2-4x^2y-4xy^2+8y$ que queda $xy(xy-4x-4y+8)=0$ y como ni x ni y pueden valer 0, queda $y(x-4)=4(x-2)$ luego $y = \frac{4(x-2)}{x-4}$ que tiene infinitas soluciones (x puede ser cualquier valor positivo distinto de 4)

15.- El área total de un ortoedro (prisma recto rectangular) es 22 cm^2 y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 24 cm. ¿Cuál es, en cm, la máxima distancia entre dos vértices de dicho ortoedro?

A) $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{12}$ **C)** $\sqrt{13}$ $\boxed{\textbf{D)}\ \sqrt{14}}$ **E)** No está unívocamente determinada

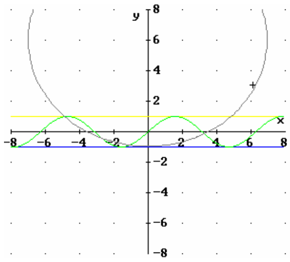
Si x, y, z son las medidas de los lados, sabemos que $2xy+2xz+2yz = 22$ *, y también* $4x+4y+4z = 24$. *Si D es la diagonal calculamos* $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$ *donde sustituimos los datos y queda* $6^2=D^2-22$*, luego,* $D = \sqrt{14}$ *cm*

16.- Una circunferencia de radio arbitrario puede cortar a la gráfica de la función $y = sen\,x$ en:

A) Dos puntos como máximo **B)** Cuatro puntos como máximo

C) Seis puntos como máximo **D)** Ocho puntos como máximo

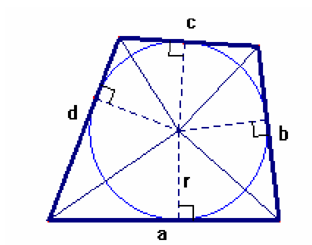
$\boxed{\textbf{E)}\ \text{Más de dieciséis puntos}}$



La función $y = sen\,x$ *es periódica con periodo* 2π*. Podemos dibujar una circunferencia con centro en el eje* OY^+ *que pase por el punto (0, −1) y por el punto* $(16\pi,0)$ *esta circunferencia corta a la función y=sen x en más de 16 puntos.*

17.- Si el cociente entre el perímetro de un cuadrilátero en el que se pueda inscribir una circunferencia y la longitud de dicha circunferencia es *k*, ¿cuál es el cociente entre el área de dicho cuadrilátero y el área del círculo?

A) $k\pi$ **B)** $\frac{k}{\pi}$ **C)** $\frac{k^2}{\pi}$ **D)** k^2 $\boxed{\textbf{E)}\ k}$



En la figura vemos que el área del cuadrilátero se puede obtener sumando las áreas de cuatro triángulos cuyas bases son los lados del cuadrilátero y cuyas alturas son todas iguales al radio de la circunferencia inscrita:

$$S = \frac{a+b+c+d}{2}r = \frac{P}{2}r$$

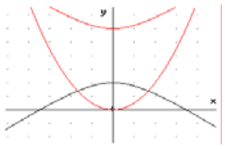
$\frac{P}{L} = k \Rightarrow P = kL = 2k\pi r$ *; entonces si S es el área del cuadrilátero y C la del círculo:* $\frac{S}{C} = \frac{\frac{P}{2}r}{\pi r^2} = \frac{k\pi r^2}{\pi r^2} = k$

18.- Consideremos las gráficas de $y = Ax^2$ e $y^2 + 3 = x^2 + 4y$ con $A > 0$. ¿En cuántos puntos se cortan?

A) Cuatro **B)** Dos **C)** Depende de los valores de A

D) Hay un valor positivo de A para el que no se cortan **E)** Nada de lo anterior

Resolvemos el sistema despejando x^2 en la primera ecuación $x^2 = y/A$ y sustituyendo en la segunda obtenemos, tras reducir y pasar al primer miembro: $Ay^2 - (1+4A)y + 3A = 0$ cuyo discriminante $\Delta = 4A^2+8A+1$ que si $A>0$ es siempre positivo luego tiene dos soluciones para y; como $x = \pm\sqrt{\frac{y}{A}}$ tenemos cuatro soluciones para el sistema



19.- El volumen de un ortoedro es 8 cm^3, su área total 32 cm^2 y sus tres dimensiones están en progresión geométrica. ¿Cuál es, en cm, la suma de las longitudes de todas sus aristas?

A) 7 **B)** 14 **C)** 24 **D)** 28 **E)** 32

Sus dimensiones son x, xr, xr^2. Sabemos que $V = x^3r^3 = 8$ (luego $xr = 2$) y que $32 = 2x^2r+2x^2r^2+2x^2r^3 = 2x^2r(1+r+r^2)$ de donde $x^2r(1+r+r^2)=16$. La suma de longitudes $L=4x+4xr+4xr^2=4x(1+r+r^2)=64/xr=32$

20.- ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\left|x - |2x+1|\right| = 3$?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

Tenemos dos posibilidades que exploramos por separado:

1.- $x-|2x+1|=3$ de donde $|2x+1|=x-3$ de donde a) $2x+1=x-3$ luego $x=-4$

b) $2x+1=-x+3$ " $x=2/3$

2.- $x-|2x+1|=-3$ " $|2x+1|=x+3$ de donde a) $2x+1=x+3$ " $x=2$

b) $2x+1=-x-3$ " $x=-4/3$

Comprobamos las cuatro soluciones y solo $x=2$ es válida

21.- Si $f(x) = 10x$ y $f(g(x)) = -5x$ entonces $g(x)$ es igual a:

A) $-\frac{1}{2}$ **B)** $-\frac{x}{2}$ **C)** $-\frac{x}{10}$ **D)** $-\frac{1}{10}$ **E)** $-2x$

Si $f(x)=10x$, es fácil ver que $f^{-1}(x) = x/10$, como $f(g(x)) = -5x$, aplicamos f^{-1} a los dos miembros y tenemos $f^{-1}f(g(x)) = f^{-1}(-5x) = -5x/10 = -x/2$.

22.- En un concurso de opción múltiple y con 30 problemas, se puntúa con 12 puntos cada respuesta correcta, se restan 7 puntos por cada respuesta incorrecta y 0 por cada respuesta en blanco. Si Antonio obtuvo 234 puntos, ¿cuántas respuestas dejó en blanco?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

*Sea m, n y p el número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco (todos entre 0 y 30). Sabemos que $m+n+p=30$ y que $12m - 7n = 234 = 19.12$. Despejamos m y tenemos que $m = \frac{19.12+6+7n}{12}$ Buscamos, pues, múltiplos de 7 que al sumarles 6 resulte un múltiplo de 12. Formamos la sucesión: 6, 13, 20, 34, 41, **48**, 55, ,… hemos encontrado una solución $n=6$, $m=23$ y, por lo tanto, $p=1$.*

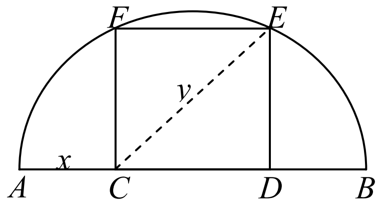
23.- Si m y n son enteros, con $1 \le m < n$, ¿cuántas soluciones positivas tiene la ecuación $x^n - x^m - 1 = 0$?

A) Ninguna **B)** n $\boxed{\textbf{C)}\ \text{Una}}$ **D)** $n - m$

E) Es posible cualquier número de soluciones

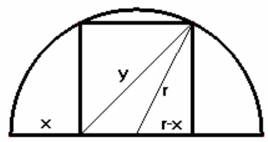
Consideramos la función: $f(x) = x^n - x^m - 1$ *Esta función pasa por el punto A(0,−1) . Estudio su crecimiento (signo de la derivada) en el semieje* OX^+: $f'(x) = nx^{n-1} - mx^{m-1} = mx^{m-1}\left(\frac{n}{m}x^{n-m} - 1\right)$ *que en* R^+ *solo se anula en x=1 y se mantiene<0 para x entre 0 y 1 y >0 para todos los x>1 La función f tiene un mínimo en B(1,−m) y como tiende a +∞ si x tiende a +∞ luego en* R^+ *corta una vez y solo una el semieje de abscisas.*

24.- En una semicircunferencia de diámetro AB inscribimos un cuadrado $CDEF$ como se muestra en la figura. Si $AC = x$ y $CE = y$, entonces $\frac{x}{y}$ es igual a:



A) $\frac{\pi}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$ $\boxed{\textbf{D)}\ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}}$ **E)** $\frac{3}{5}$

Aplicamos el T de Pitágoras al triángulo CED teniendo en cuenta que el lado del cuadrado mide 2(r−x) y resulta: $y^2=8(r-x)^2$ *(*) Aplicamos ahora el T de Pitágoras a ODE (siendo O el centro de la semicircunferencia):* $r^2=(r-x)^2+4(r-x)^2=5(r-x)^2$ *. Despejando* $(r-x)^2$ *en las dos expresiones e igualando, tenemos que:* $8r^2=5y^2$ *luego* $r = \sqrt{\frac{5}{8}}y$ *que sustituido en (*) queda:* $\frac{y}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}y - x$ *que operando nos lleva a*



$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}y \quad \text{luego,} \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$$

25.- $arctg\left(\frac{1}{10}\right) + arctg\left(\frac{1}{17}\right)$ es igual a:

A) π **B)** $arctg\left(\frac{1}{3}\right)$ **C)** $\frac{\pi}{2}$ **D)** $arctg\left(\frac{1}{7}\right)$ $\boxed{\textbf{E)}\ arctg\left(\frac{27}{169}\right)}$

Si llamamos p=arctg(1/10) y q=arctg(1/17), tenemos que tg p = 1/10 y tg q = 1/17. Utilizando la fórmula de la tangente de la suma: $tg(p+q) = \frac{tgp+tgq}{1-tgp.pgq} = \frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{10}\frac{1}{17}} = \frac{17+10}{169} = \frac{27}{169}$ *luego p + q = 27/169*