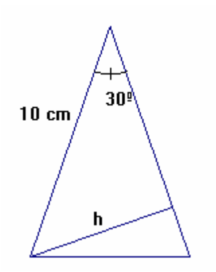
1 Una parábola de eje vertical y vértice $V(2, 1)$, que pasa por $(4,9)$, también pasa por:

A) (1,2) $\boxed{\textbf{B)}\ (1, 3)}$ **C)** (1, 4) **D)** (1, 5) **E)** (1,6)

Sol:

Su ecuación: $y = a(x-2)^2 + 1$ *para que pase por (4,9):* $9 = a(4-2)^2 + 1$ *de donde se deduce que* $a = 2$ *y, entonces la imagen de* $x = 1$ *es* $y(1) = 2(1-2)^2 + 1 = 3$

2 Si un rombo de 10 cm de lado tiene un ángulo de 30º, entonces su área, en cm^2, es:



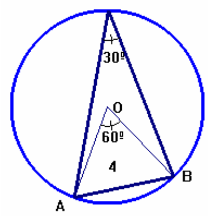
A) 50 **B)** $50\sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{C)}\ 50\sqrt{3}}$ **D)** 60 **E)** $20\sqrt{3}$

Sol:

En la figura está dibujado medio rombo. $h = 10 \text{ sen } 30^o = 5$. *El área de este triángulo será:* $S = (10.5)/2 = 25$ *Luego el área del rombo es 50* cm^2

3 El radio, en cm, de la circunferencia circunscrita a un triángulo con un lado que mide 4 cm y ángulo opuesto de 30º es:

A) 2 **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** 3 $\boxed{\textbf{E)}\ 4}$



Sol:

El ángulo central es doble que el inscrito que abarca el mismo arco por lo que <AOB = 60º y, como OA=OB=radio, AOB es equilátero. Luego sus lados miden todos 4cm.

4 ¿Cuántas soluciones formadas por enteros positivos tiene la ecuación $4x + 3y + 2z = 18$?

$\boxed{\textbf{A)}\ \text{tres}}$ **B)** cinco **C)** seis **D)** ocho **E)** nueve

Sol:

Descomponemos el número 18 como suma de un múltiplo de 4, uno de 3 y uno de 2 y vemos que solo hay tres formas (porque el 0 no es un entero positivo).:

múlt. de 4	*múlt de 3*	*múlt de 2*	*x*	*y*	*z*
8	6	4	2	2	2
4	12	2	1	4	1
4	6	8	1	2	4

5 Un triángulo acutángulo tiene dos lados que miden 10 y 15 cm. De las medidas: 5, 10, 15, 18 y 20 cm, ¿cuántas pueden corresponder al tercer lado?

A) una $\boxed{\textbf{B)}\ \text{dos}}$ **C)** tres **D)** cuatro **E)** cinco

Sol:

En un triángulo todos los lados han de medir menos que la suma de los otros dos. En uno acutángulo, además, el cuadrado del mayor ha de ser menos que la suma de los cuadrados de los otros dos. El 5 no cumple la primera condición (15=10+5), el 10 y el 20 no cumplen la segunda ($15^2>10^2+10^2$ *y* $20^2>10^2+15^2$). *Quedan dos.*

6 El resto de dividir un polinomio por $x-5$ es 2 y el resto de dividirlo por $x-2$ es 5. ¿Cuál es el resto de dividirlo por $x^2-7x+10$?

A) $3x+7$ **B)** $-3x+10$ $\boxed{\textbf{C)}\ -x+7}$ **D)** $2x+3$ **E)** $3x+2$

Sol:

El divisor es $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$ luego el resto será de primer grado $R(x)=ax+b$ y se ha de cumplir que $P(x)=C(x)(x-2)(x-5)+R(x)$ y como sabemos por el teorema del resto que $P(2)=5$ y que $P(5)=2$ tenemos: $\begin{cases}5a+b=2\\2a+b=5\end{cases}$ sistema cuyas soluciones son $a=-1$ y $b=7$ luego el resto buscado es $R(x)=-x+7$

7 Al dividir un número entre 5 da resto 3, y al dividirlo por 7 da resto 2. ¿Cuál es el resto al dividirlo por 35?

A) 24 **B)** 12 **C)** 5 **D)** 9 $\boxed{\textbf{E)}\ 23}$

Sol:

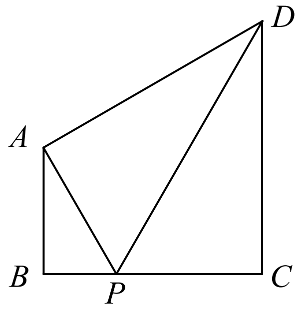
$N=35m+n$ $(n<35)$. Como $35m$ es divisible por 5 y por 7, $n=7p+2$ y, también, $n=5q+3$. Luego buscamos el menor número coincidente en las dos listas: 9, 16, 23, 30 y 8, 13, 18, 23, 28, 33

8 Se tira una moneda tres veces y se gana si salen dos caras seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

A) $\frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{B)}\ \frac{3}{8}}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{1}{4}$

Sol:

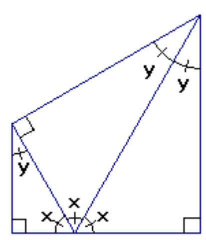
Todas las formas posibles son: ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx Son ganadoras la 1ª, la 2ª y la 4ª. En total 3 de 8.



9 Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el segmento BC mide 12 cm, el área, en cm^2, del trapecio $ABCD$ es:

A) 108 **B)** $72\sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{C)}\ 72\sqrt{3}}$ **D)** 96 **E)** $64\sqrt{6}$

Sol:



Por ser semejantes, sus ángulos deben ser iguales. Si llamamos y al que se opone al cateto menor y x al otro: $3x=180^o$ luego $x=60^o$ e $y=30^o$.

$$tg60^o=\frac{DC}{PC}=\frac{AB}{BP}=\frac{DC+AB}{PC+BP}=\frac{DC+AB}{12}=\sqrt{3} \quad \text{de donde} \quad DC+AB=12\sqrt{3}$$

Pero el área del trapecio el igual a la semisuma de las bases (DC+AB) por la altura:

$$S=\frac{DC+AB}{2}BC=\frac{12\sqrt{3}}{2}12=72\sqrt{3}\ cm^2$$

10 Mi casa dista del colegio 840 m. Al ir y al volver camino a una velocidad uniforme, si bien a la ida voy un tercio más rápido que a la vuelta. ¿A qué distancia de mi casa está el punto en el que los tiempos empleados en ir desde casa y volver desde el colegio son los mismos?

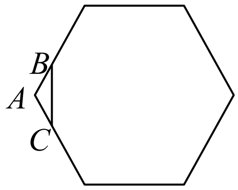
A) 210 m **B)** 240 m **C)** 360 m **D)** 420 m **E)** 480 m

Sol:

Llamaremos x a la distancia desde casa hasta ese punto y 840−x al resto del camino. Si v_1 es la velocidad a la ida y v_2 la velocidad a la vuelta, sabemos que: $v_1=v_2(1+1/3)=4v_2/3$,

Entonces si igualamos los tiempos en llegar hasta ese punto $\frac{x}{v_1}=\frac{840-x}{\frac{3}{4}v_1}$ *de donde 3x = 3360 −4x y de ahí obtenemos x=3360/7 = 480*

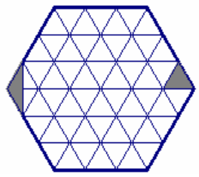
11 El hexágono regular de la figura tiene área 216 cm^2. En el triángulo isósceles *ABC*, el lado *AB* es un tercio del lado del hexágono. ¿Cuál es, en cm^2, el área de dicho triángulo?



A) 16 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 4

Sol:

Si dividimos los lados en tres partes y trazamos paralelas vemos el hexágono dividido en 36 triángulos equiláteros. El triángulo ABC tiene área igual que uno de aquellos o sea S = 216 / 36 = 6 cm^2



12 ¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

Sol:

Usaremos el desarrollo del Binomio de Newton:

$$(50+1)^{48}=\binom{48}{0}50^{48}+\binom{48}{1}50^{47}1+\binom{48}{2}50^{46}1^2+\ldots+\binom{48}{46}50^2 1^{46}+\binom{48}{47}50^1 1^{47}+\binom{48}{48}1^{48}$$

Todos los términos hasta el antepenúltimo acaban en dos ceros o más, el penúltimo es 48.50 = 2400 y el último término es 1 así que las dos últimas cifras de la suma son 01.

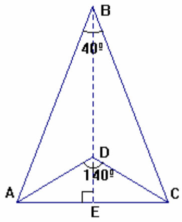
13 $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6^2}\right)=$$

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{17}{18}$ **C)** $\frac{7}{12}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$

Sol:

$$=\frac{2^2-1}{2^2}\cdots\cdots\frac{6^2-1}{6^2}=\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}\cdots\cdot\frac{(6+1)(6-1)}{6^2}=\frac{3.1}{2^2}\frac{4.2}{3^2}\frac{5.3}{4^2}\frac{6.4}{5^2}\frac{7.5}{6^2}$$ *que simplificamos y queda:* $\frac{7}{2.6}=\frac{7}{12}$

14 Los triángulos ABC y ADC son isósceles con $AB = BC$ y $AD = DC$. Si el punto D está dentro del triángulo ABC, siendo el ángulo $A\hat{B}C = 40^{o}$ y el ángulo $A\hat{D}C = 140^{o}$, ¿cuánto mide el ángulo $B\hat{A}D$?



A) 20º **B)** 30º **C)** 40º $\boxed{\textbf{D)}\ 50^{o}}$ **E)** 60º

Sol:

<ABE=20º luego <BAE=70º. Por otra parte <ADE=70º <DAE=20º. Finalmente <BAD = <BAE − <DAE = 70º−20º=50º

15 La media de las edades de todos los miembros de una familia compuesta por padre, madre y varios hijos es 20 años. Si el padre tiene 48 años y la media de las edades de la madre y de todos los hijos es 16, ¿cuántos hijos tienen?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 $\boxed{\textbf{E)}\ 6}$

Sol:

Si son n los miembros, la suma de sus edades: $S = 20n$. Entonces: $S - 48 = 16(n - 1)$ de donde $20n - 48 = 16n - 16$ y de ahí se obtiene que $n = 32/4 = 8$ miembros. Por lo tanto el número de hijos es 6.

16 Si m y n son dos enteros positivos con $75m = n^3$, ¿cuál es el mínimo valor posible de $m + n$?

A) 15 **B)** 30 **C)** 50 $\boxed{\textbf{D)}\ 60}$ **E)** 5700

Sol:

$S = m + n = \mathrm{m} + \sqrt[3]{75\mathrm{m}} = \mathrm{m} + \sqrt[3]{5^2.3.\mathrm{m}}$ el valor más pequeño posible de la suma se alcanza cuando m es lo más pequeño posible y tal que el radicando sea un cubo perfecto o sea: $m = 5.3^2 = 45$ y, entonces $S = 45 + 15 = 60$

17 Si el número a verifica $a + \dfrac{1}{a} = 4$, ¿cuál es el valor de $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$?

A) 256 **B)** 164 **C)** 172 **D)** 192 $\boxed{\textbf{E)}\ 194}$

Sol:

Si $a + \dfrac{1}{a} = 4$ *, entonces,* $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2} = 16$ *, de donde* $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 14$

De la misma manera: si $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 14$*, entonces* $\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)^2 = a^4 + 2 + \dfrac{1}{a^4} = 14^2$ *, de donde* $a^4 + \dfrac{1}{a^4} = 14^2 - 2 = 194$

18 ¿Cuántas parejas (m,n) de enteros positivos, con $m > n$, verifican $m^2 - n^2 = 96$?

A) 3 $\boxed{\textbf{B)}\ 4}$ **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

Sol:

Descomponemos y queda: (m + n)(m − n)= 96 = 2^5.3 de donde podemos construir la tabla:

a=(m+n)	b=(m−n)	m=(a+b)/2	n=(a−b)/2
48	2	25	13
24	4	14	10
16	6	11	5
12	8	10	2

Son cuatro las formas posibles

19 Si $sen\ a + sen\ b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ a + cos\ b = 1$, $cos(a-b)$ es igual a:

A) $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ $\boxed{\textbf{B)}\ \frac{1}{3}}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

Sol:

Si elevamos al cuadrado las dos expresiones del enunciado:

$\begin{cases} sen^2 a + 2 sen a sen b + sen^2 b = \frac{5}{3} \\ cos^2 a + 2 cos a cos b + cos^2 b = 1 \end{cases}$ *que queda:* $\begin{cases} sen a sen b = 1/3 \\ cos a cos b = 0 \end{cases}$ *y sumando las dos queda cosacosb + senasenb = 1/3 luego cos(a−b) = 1/3*

20 La función f verifica que $f(3x-1) = x^3 + x + 1$ para cualquier número real x. ¿Cuál es el valor de $f(5)$?

A) 7 **B)** 13 **C)** 31 $\boxed{\textbf{D)}\ 11}$ **E)** 131

Sol:

f(3x − 1) = x^3 + x + 1 si queremos hallar f(5) tendremos que dar a x el valor x=2 y queda que f(5) = 2^3 + 2 + 1 = 11

21 Considera las progresiones aritméticas 2001, 2008, 2015, … y 1999, 2008, 2017, …. ¿Cuál es el siguiente número, después del 2008, que aparece en las dos?

A) 2080 **B)** 2078 **C)** 2071 **D)** 2106 **E)** 2134

Sol:

La primera va de 7 en 7 años y la segunda de 9 en 9. Coincidirán cuando hayan transcurrido desde 2008 un número de años que sea a la vez múltiplo de 7 y de 9 y el menor es 63. Coincidirán en 2008+63 = 2071

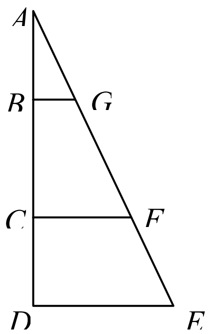
22 ¿Cuál es el mayor número que al dividirlo entre 2008 nos da que el cociente es igual que resto?

A) 4034072 **B)** 4018 **C)** 4030054 **D)** 4032063 **E)** 2009

Sol:

El número N que buscamos ha de cumplir que N=2008n + n = 2009n luego se trata de un múltiplo de 2009 pero como el resto n ha de ser menor que el divisor, n <2008 . El máximo valor posible para n es 2007 luego el mayor N posible es 2007x2009 = 4032063

23 En la figura adjunta los segmentos de longitudes BG, CF y DE son paralelos. Si $AG = 3$, $GF = 4$, $FE = 3$, $DE = 5$, $BG = x$ y $CF = y$, ¿cuánto vale $x + y$?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Sol:

Por semejanza de triángulos: $\frac{10}{5} = \frac{7}{y}$ *, de donde* $y = \frac{35}{10}$ *y* $\frac{10}{5} = \frac{3}{x}$ *, de donde* $x = \frac{15}{10}$ *. Finalmente* $x + y = 50/10 = 5$

24 Si $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x+y}}$, ¿para cuál de los valores siguientes de x resulta que y no es un número real?

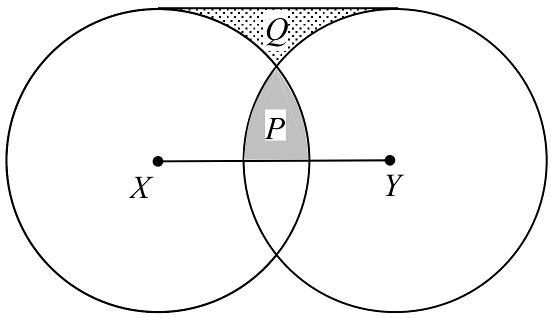
A) -6 **B)** -3 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 6

Sol:

Haciendo operaciones: $xy + \frac{xy}{x+y} = x$ *, de donde:* $x^2y + xy^2 + xy = x^2 + xy$ *y, de ahí*

$xy^2 + x^2y - x^2 = 0$; $x(y^2 + xy - x) = 0$ *luego* $x = 0$ *o bien* $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ *que requiere* $x(x+4) \geq 0$ *lo que deja fuera a todos los valores de x entre −4 y 0 por lo que la respuesta correcta es la B.*

25 Los puntos X e Y son los centros de dos círculos de radio 1 cm. Si el área de la región P es la misma que el área de la región Q, la longitud del segmento *XY*, en cm, es igual a:



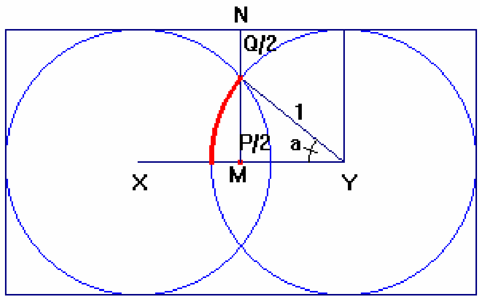
A) 1,5 **B)** $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\textbf{C)}\ \frac{\pi}{2}}$ **D)** 1,4 **E)** 1,6

Sol:

El área del sector de amplitud a (medido en radianes) es a/2. Entonces la mitad de P mide:

$$P/2 = \frac{a}{2} - \frac{\cos a\,.\,sen a}{2}$$ *y la mitad de Q :*

$$Q/2 = cos a - \frac{cos a\,.\,sen a}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - a}{2} = cos a - \frac{cos a\,.\,sen a}{2}$$



Pero si P = Q queda que $\cos a = \frac{\pi}{4}$ pero XY = 2MY = 2cosa =π/2