TOÁN 2

Khoa CNTT & TƯD, ĐH Tôn Đức Thắng

NỘI DUNG

Tài liệu:

Toán cao cấp, Đại Số Tuyến Tính (Toán 2), Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, NXB ĐHQG TP HCM.

Tóm tắt bài giảng Toán C2, Thái Khắc Định, ĐH Tôn Đức Thắng.

CHƯƠNG 1

MA TRẬN & ĐỊNH THỨC

MA TRẬN

1.1. Định nghĩa.

Cột

Hàng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a_{12}

a_{23}

A là ma trận cấp 3x2

Tập các ma trận n hàng – k cột kí hiệu là M^{nxk}

1.2. Các loại ma trận.

- Ma trận vuông: *số hàng = số cột*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$ là ma trận vuông cấp 3.

- Ma trận đơn vị: ngoài đường chéo chính thì bằng 1

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ là ma trận đơn vị cấp 3.

- Ma trận chuyển vị: *của ma trận A kí hiệu là A^T*

hàng A----→ cột A^T

cột A ----→ hàng A^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1.3. Các phép toán trên ma trận.

1.3.1. Phép cộng hai ma trận.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+2 \\ 3+(-3) & 0+1 \\ 0+1 & 4+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3.2. Phép nhân một số với một ma trận.

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.1 \\ 2.3 & 2.0 \\ 2.0 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

1.3.3. Phép nhân hai ma trận.

Định nghĩa: A * B = C

nxk kxm = nxm

c_{ij}= *hàng i của A * cột j của B*

Lưu ý: số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

(1 2 3)*(4 5 1)= 1.4+2.5+3.1=4+10+3=17

$$\begin{bmatrix}2&1&4\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\3&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+1.3+4.0&2.4+1.2+4.1&2.5+1.1+4.3\\0.1+3.3+2.0&0.4+3.2+2.1&0.5+3.1+2.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&14&23\\9&8&9\end{bmatrix}$$

c_{21} = (hàng 2 của A) x (cột 1 của B)

$$= 0.1+3.3+2.0$$

Tổng quát: c_{ij} = (hàng i của A) x (cột j của B)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&3&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&4&5\\3&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1&4\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\3&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.1+1.3+4.0&2.4+1.2+4.1&2.5+1.1+4.3\\0.1+3.3+2.0&0.4+3.2+2.1&0.5+3.1+2.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&14&23\\9&8&9\end{bmatrix}$$

Bài tập

1. Tính tích các ma trận sau:

$$a)\begin{bmatrix}2&1\\0&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix}0&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1&0\\3&0&0&1\\1&2&-1&0\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}2&-2&3\\5&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\5&-3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

2. Tính tích của AB và BA nếu

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&2\\1&4&3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

3. Cho A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tính các ma trận sau:

a) A^2, AI_3, I_3A;

b) $A.A^T, A^T.A$

ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa.

Định thức của A vuông, ký hiệu là det(A) hoặc |A|

$$|a| = a; \qquad |-2| = -2;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

đ/c chính - đ/c phụ

đ/c phụ

đ/c chính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2$$

ĐỊNH THỨC

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}]$

$-[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}]$

ĐỊNH THỨC

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\det(A) = [(-2).1.(-1) + 2.3.2 + (-3).(-1).0]$$
$$-[(-3).1.2 + (-2).3.0 + 2.(-1).(-1)]$$
$$= [2 + 12] - [-6 + 2] = [14] - [-4] = 18$$

Phân tích theo hàng i

Cho A = (a_{ij}) là ma trận vuông cấp n.

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

trong đó:

*A_{ik} được gọi là **phần bù đại số** của a_{ik}*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} det(A \text{ bỏ hàng i cột k})$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{h_3}{=} 2.A_{31} + 0.A_{32} + (-1).A_{33}$$

$$= 2.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2.[2.3 - (-3).1] - [(-2).1 - 2.(-1)]$$

$$= 2.[6+3] - [-2+2] = 18$$

Phân tích theo cột i

$$detA = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni} \, ,$$

*trong đó A_{ki} là **phần bù đại số** của a_{ki}*

Ví dụ 1: $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| \overset{C_2}{=} 2.A_{12} + 1.A_{22} + 0.A_{32}$$

$$= 2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2.[(-1).(-1) - 3.2] + [(-2).(-1) - (-3).2]$$

$$= -2[1-6] + [2+6] = 10 + 8 = 18$$

2.2. Các tính chất.

1. *det(AB) = det(A)det(B)*
2. *det(A^T) = det(A).*

Cho det(A)=5. Tính det(AA^T) và det (A^6).

det(AA^T)=det(A).det(A^T)=det(A).det(A)=25

det (A^6)=det(A.A…A)=det(A).det(A)…det(A)
=det$(A)^6$=5^6.

2.2. Các tính chất.

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & -3 & d & e \\ 0 & 0 & -5 & f \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2.(-3).(-5).6 = 180$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ a & -3 & 0 & 0 \\ b & c & -5 & 0 \\ d & e & f & 6 \end{vmatrix} = 2.(-3).(-5).6 = 180$$

Ví dụ 8:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{h_2 = h_2 - 2h_1}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_3 = h_3 + 2h_1}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{h_2 \leftrightarrow h_3}{=} -\left(-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -1.2.(-9) = 18$$

Định lý:

- Nếu ma trận có một hàng (cột) bằng không thì định thức của nó bằng 0.

- Nếu ma trận có hai hàng (cột) tỉ lệ nhau thì định thức của nó bằng 0.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

BÀI TẬP

1. Tính các định thức cấp 2:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

2. Tính các định thức cấp 3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

3. Tính các định thức cấp 4:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **;** **b)** $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **;**

c) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Tính các định thức:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Khái niệm.

Ma trận vuông A cấp n được gọi là khả nghịch nếu tồn ma trận B cấp n sao cho:

$$AB = BA = I_n,$$

B được gọi là ma trận nghịch đảo của A, kh A^{-1}.

Ngược lại ta nói A không khả nghịch.

Định lý: ***Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi det(A) ≠ 0.***

- **Ma trận phụ hợp.**

Cho $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ đặt $P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix}$

với A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}.

Ma trận P_A được gọi là ma trận phụ hợp của A.

3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.

1. Dùng ma trận phụ hợp.

Nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} P_A$

2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp.

Nếu A khả nghịch thì

Ví dụ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $det(A) = -30 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -14;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Vậy

$$P_A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -14 & 2 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{30} P_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.

1. Dùng ma trận phụ hợp.

Nếu A khả nghịch thì $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} P_A$

2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp.

Nếu A khả nghịch thì

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow{pbdsc} \ldots \xrightarrow{pbdsc} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_2 = h_2 - 3h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 = h_3 + 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 = h_3 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 = \frac{1}{6} h_3}$$

$$\xrightarrow{h_3 = \frac{1}{6} h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 = h_2 - 4h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{h_2 = -\frac{1}{5} h_2}$$

$$\xrightarrow{h_2 = -\frac{1}{5} h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 = h_1 - 2h_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{-4}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

HẠNG CỦA MA TRẬN

Xét ma trận A cấp mxn, các phần tử nằm trên giao của k hàng k cột tạo nên một ma trận vuông cấp k, định thức của nó được gọi là định thức con cấp k.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **là một định thức con cấp 2 của A.**

$\gamma = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **là một định thức con cấp 3 của A.**

Định nghĩa: ***Hạng của một ma trận là cấp cao nhất của các định thức con khác 0.***

Ví dụ: Tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có tất cả 4 định thức con cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

có định thức con cấp 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ **Vậy** $r_A = 2$**.**

Định lý: ***Ma trận bậc thang có k hàng khác không có hạng bằng k.***

4.2 Cách tính hạng của một ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp.

Định lý: ***Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng ma trận.***

Để tìm hạng của một ma trận A, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang B, và hạng của A chính là số hàng khác không của B.

CHƯƠNG 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Định nghĩa hệ phương trính tuyến tính.

1.2. nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

1.3. Định lý Kronecker.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. Hệ phương trình Cramer.

2.1.1. Định nghĩa.

2.1.2. Phương pháp dùng ma trận nghịch đảo.

2.1.3. Phương pháp Cramer.

2.2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

2.2.1. Phương pháp Gauss.

2.2.2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.