

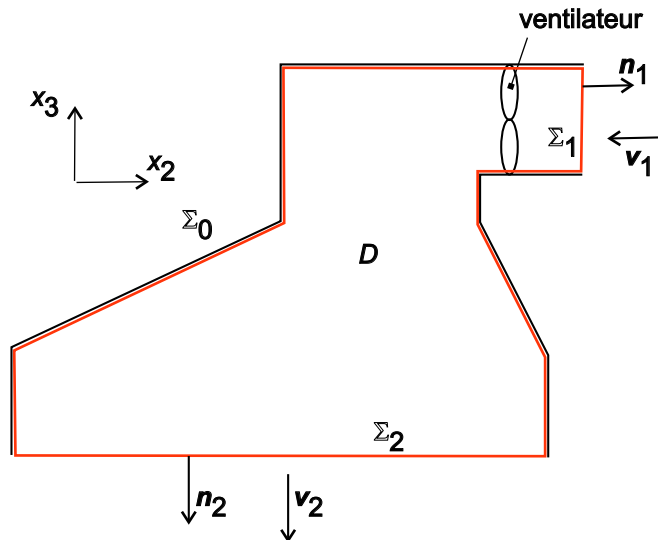
Devoir de mécanique des fluides – corrigé –

Problème 1 *Aéroglesseur*

- Il suffit d'écrire la projection de l'équation de la résultante dynamique sur l'axe x_3 . On obtient directement :

$$R_3 = mg$$

- On isole le domaine fluide contenu dans la portion de conduite montré sur la figure ci-dessous.



On applique alors le théorème d'Euler au domaine D de la figure. On a :

$$\int_{\partial D} [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dS = 0$$

Dans notre cas, on peut écrire :

$$[p \mathbf{n}]_{\Sigma_0} + [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_{\Sigma_1} + [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_{\Sigma_2} = 0$$

avec

$$[p \mathbf{n}]_{\Sigma_0} = -R_3 \mathbf{x}_3 - p_1 S_1 \mathbf{x}_2 + p_2 S_2 \mathbf{x}_3; \quad [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_{\Sigma_1} = -\rho v_1^2 S_1 \mathbf{x}_2; \quad [\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_{\Sigma_2} = \rho v_2^2 S_1 \mathbf{x}_3$$

On en déduit alors :

$$R_3 = p_2 S_2 + \rho S_2 v_2^2$$

or, $q_v = S_2 v_2$, d'où l'on tire finalement :

$$R_3 = p_2 S_2 + \rho \frac{q_v^2}{S_2}$$

- L'équation de continuité (conservation de la masse) impose

$$q_v = S_4 v_4 = S_2 v_2.$$

Le théorème de Bernoulli entre l'intérieur et l'extérieur de la jupe donne : $p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_4^2$

c'est-à-dire que l'on a $p_2 = \frac{\rho}{2}(v_4^2 - v_2^2)$ et donc

$$p_2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{S_4^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) q_v^2$$

avec $S_4 = 2(L+l)h$ et $S_2 = Ll$. On en déduit : $mg = \rho \frac{q_v^2}{S_2} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_2} \right) q_v^2 S_2$. Cette expression peut s'écrire encore : $mg = \rho q_v^2 \left(\frac{1}{S_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_4} - \frac{1}{S_2} \right) \right)$. On a donc : $mg = \frac{\rho q_v^2}{2S_2} \left(1 + \frac{S_2^2}{S_4^2} \right)$. Ce qui donne finalement :

$$q_v^2 = \frac{8mg(L+l)h}{\rho Ll} \left(\frac{1}{1 + \frac{4(L+l)^2 h^2}{(Ll)^2}} \right)$$

4. L'application numérique donne alors :

$$q_v = \left(\frac{8 \times 2 \cdot 10^3 \times 10 \times 16 \times 0,1}{1,27 \times 12 \times 4} \left(\frac{1}{1 + \frac{4 \times 16^2 \times 0,1^2}{(4 \times 12)^2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit

$$q_v = 64,66 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Calculons le nombre de Reynolds de l'écoulement. On a : $Re = \frac{v_2 \frac{L+l}{2}}{\nu}$. La vitesse v_2 est donnée par : $v_2 = \frac{q_v}{S_2} = \frac{64,66}{12 \times 4} = 1,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ numériquement $Re = \frac{1,35 \times 8}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 720000$, nombre qui est très supérieur à 2000. L'écoulement est donc turbulent.

6. Par définition, le rendement du ventilateur vaut :

$$\eta_m = \frac{q_v \Delta p}{P_m}$$

P_m étant la puissance mécanique du ventilateur. D'après le théorème de Bernoulli, on a :

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_4 + \frac{1}{2} \rho v_4^2$$

La différence de pression vaut alors : $\Delta p = p_2 - p_4 = \frac{\rho}{2} (v_4^2 - v_2^2)$ Calculons v_4 en utilisant l'équation de conservation de la masse : $S_4 v_4 = S_2 v_2$. D'où $v_4 = \frac{Ll}{2(L+l)h} v_2 = \frac{12 \times 4}{2(12+4) \times 0,1} \times 1,35 = 20,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On en tire donc :

$$\Delta p = \frac{1,27}{2} (20,25^2 - 1,35^2) = 259 \text{ Pa}$$

Par conséquent :

$$P_m = \frac{64,66 \times 259}{0,7} = 23,9 \text{ kW}$$

Problème 2 *Circuit hydraulique*

1. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est : $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$. Calculons d'abord la vitesse du fluide dans la tuyauterie. On a :

$$u = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0,245}{\pi \times 0,4^2} = 1,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On en déduit le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{1000 \times 1,95 \times 0,4}{10^{-3}} = 780000 \gg 2000$$

L'écoulement est turbulent.

2. Appliquons le théorème de Bernoulli généralisé :

$$H_1 = H_2 + \left(\sum \lambda \frac{L}{d} + \sum \zeta \right) \frac{u^2}{2g} + \Delta H_{\text{turbine}}$$

L'écoulement étant laminaire, le coefficient de pertes de charge linéique est donné par la loi de Blasius :

$$\lambda = 0,316 Re^{-0,25} = 0,316 \times 780000^{-0,25} = 0,01$$

En ce qui concerne les pertes de charge singulières, on a :

- pour l'élargissement brusque, on a $\zeta = 1$, puisque le rapport entre la section d'entrée et de sortie est proche de zéro ;
- pour le coude, le tableau donne $\zeta = 0,1$

La charge en 1 est $H_1 = x_3 = 1705$ m, car la vitesse de l'eau est pratiquement nulle et la pression est la pression atmosphérique. La charge en 2 est $H_2 = x_3 = 603$ m, car la vitesse de l'eau est pratiquement nulle et la pression est la pression atmosphérique.

On en déduit alors la charge reçue par la turbine :

$$\Delta H_{\text{turbine}} = 1705 - 603 - \left(0,01 \frac{7280}{0,4} + 1 + 0,1\right) \frac{1,95^2}{2 \times 10} = 1067,2 \text{ m}$$

et l'on obtient la charge en pascals : $\Delta p_{\text{turbine}} = \rho g \Delta H_{\text{turbine}} = 10^3 \times 10 = 10,7 \text{ MPa}$.

$$\boxed{\Delta H_{\text{turbine}} = 1067,2 \text{ m} \quad \Delta p_{\text{turbine}} = 10,7 \text{ MPa}}$$

3. La puissance hydraulique mise à la disposition de la turbine est donnée par la relation :

$$P_H = q_v \Delta p$$

numériquement, on a :

$$\boxed{P_H = 10,7 \times 10^6 \times 0,245 = 2615 \text{ kW}}$$

Problème 3 *Étalement par centrifugation*

1. Les approximations de lubrification conduisent à négliger les composantes de vitesse autres que la composante radiale. D'autre part, Re étant petit, on résout l'équation de Navier-Stokes. On suppose que la variation d'épaisseur est assez lente pour traiter un problème quasi stationnaire. D'où :

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{f} + \mu \Delta \mathbf{v}$$

L'épaisseur de la couche de liquide étant très petite, on peut négliger les variations de pression hydrostatique provoquées par le gradient d'épaisseur. De ce fait, la seule force à prendre en compte est la force centrifuge. Dans le laplacien de u_r , les dérivées par rapport à la coordonnée verticale x_3 sont beaucoup plus grandes que les autres, d'où :

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_3^2} = \rho \omega^2 r}$$

2. Les conditions aux limites sont : vitesse nulle sur la paroi solide ($x_3 = 0$) et contrainte nulle ($\frac{\partial u_r}{\partial x_3} = 0$) sur la surface libre ($x_3 = h$).
3. Le champ de vitesse est obtenu par intégration de l'équation de mouvement, qui donne :

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_3} = \frac{\omega^2 r}{\nu} (x_3 - h)$$

en tenant compte de la condition sur la surface libre. Puis, en intégrant une seconde fois :

$$u_r = \frac{\omega^2 r}{\nu} \left(\frac{x_3^2}{2} - x_3 h \right)$$

Le débit, intégré sur l'épaisseur h est donc :

$$\boxed{q_v = \int_0^h u_r dx_3 = \frac{\omega^2 r h^3}{\nu} \frac{1}{3}}$$

4. On écrit la conservation du volume de liquide dans un espace annulaire compris entre les rayons r et $r + dr$:

$$2\pi r dr \frac{\partial h}{\partial t} = q_v(r)2\pi r - q_v(r + dr)2\pi(r + dr)$$

avec

$$q_v(r + dr) = q_v(r) + \frac{\partial q_v}{\partial r} dr$$

et donc, en simplifiant,

$$r \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_v}{\partial r} r - q_v = -\frac{\partial}{\partial r}(r q_v)$$

soit

$$\boxed{r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega^2 r^2}{\nu} \frac{h^3}{3} \right) = 0}$$

5. Si h est indépendant de r , alors l'équation d'évolution pour h est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2\omega^2 h^3}{3\nu} = 0$$

soit :

$$\frac{h}{h^3} = -\frac{2\omega^2}{3\nu}$$

qui s'intègre par rapport au temps en :

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} = \frac{4\omega^2}{3\nu}(t - t_0)$$

Si l'épaisseur finale est beaucoup plus petite que l'épaisseur initiale h_0 , le temps d'amincissement est :

$$t \simeq \frac{3\nu}{4\omega^2 h^2}$$

Le calcul numérique donne un temps d'étalement de l'ordre de 1 h.