

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

GENERALITES SUR LES CODES RANS
EN ECOULEMENT COMPRESSIBLE

Eric Goncalvès - septembre 2004

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	PRESENTATION GENERALE D'UN SOLVEUR RANS	4
3	LES EQUATIONS POUR UN ECOULEMENT TURBULENT COMPRES-	
	SIBLE	5
3.1	Formulation conservative	6
3.2	Les modèles de turbulence	7
3.2.1	La viscosité turbulente	8
3.2.2	Modèles algébriques	8
3.2.3	Modèle à 1 équation : le modèle de Spalart-Allmaras (1992)	9
3.2.4	Modèles à 2 équations de transport	10
3.2.5	Modèles au second ordre - RSM	13
3.2.6	Aspects thermiques	13
3.2.7	Ecoulements instationnaires - URANS	15
3.3	Les lois de parois	16
3.3.1	Problématique	16
3.3.2	Rappel des propriétés des couches limites turbulentes 2D incompressibles .	16
3.3.3	Effets de compressibilité	17
3.3.4	Principe	17
4	RESOLUTION NUMERIQUE	18
4.1	Intégration temporelle	18
4.1.1	Phase explicite	18
4.1.2	Pas de temps local	18
4.1.3	Phase implicite	18
4.1.4	Ecoulements instationnaires - Pas de temps dual	19
4.2	Discrétisation spatiale des flux convectifs	20
4.3	Discrétisation spatiale des termes visqueux	21
4.4	Multigrille	22
4.4.1	Principe	22
4.4.2	Description de l'algorithme multigrille	22
4.4.3	Opérateurs intergrille	24
5	LES CONDITIONS AUX LIMITES	24
5.1	Les conditions aux limites à l'infini	24
5.1.1	Champ moyen	24
5.1.2	Champ turbulent	25
5.2	Les conditions aux limites de paroi	26
5.2.1	Champ moyen	26
5.2.2	Champ turbulent	26
5.3	Les conditions initiales	26
6	MAILLAGE STRUCTURE/NON STRUCTURE	27
7	LA TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT	27

Références	28
8 ANNEXES	30
8.1 Matrices jacobiennes des flux convectifs	30
8.2 Matrices jacobiennes des flux visqueux	31
8.3 Cas des équations de transport de la turbulence	32
8.4 Système des équations NS moyennées "à la Favre"	33
8.5 Paramètres de calculs	34

1 INTRODUCTION

La simulation numérique des écoulements turbulents est un formidable outil aussi bien pour essayer de mieux comprendre les mécanismes physiques que pour la conception et le développement dans l'industrie. Son utilisation courante a été rendue possible par les progrès réalisés dans le domaine de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides et surtout par l'explosion des moyens de calcul. Aujourd'hui, la simulation numérique est un véritable complément aux études expérimentales et permet de limiter le nombre d'essais en soufflerie, entraînant une réduction des coûts et des délais de conception, et constitue ainsi un enjeu économique majeur.

Actuellement, les applications concernent des géométries de plus en plus proches des configurations réelles (avion complet, moteur, tuyère...) qui mettent en jeu des phénomènes complexes : transition laminaire-turbulent, décollements, interaction choc-couche limite. Il se pose alors les problèmes de représentativité des calculs par rapport à la physique à reproduire, de précision, de robustesse et de coût de calcul.

En effet, malgré la puissance des calculateurs, la simulation de toutes les échelles spatio-temporelles actives au sein d'un écoulement turbulent, depuis les plus grandes imposées par la taille du problème jusqu'aux plus petites dissipatives (échelle de Kolmogorov [1]), ne peut être envisagée à l'heure actuelle. Cette approche, appelée Simulation Numérique Directe ou DNS (Direct Numerical Simulation), est en pratique limitée à des cas très simples à faible nombre de Reynolds. Dès lors, pour évaluer les performances aérodynamiques de composants industriels, le recours à des modèles s'impose pour réduire les coûts de calcul, tout en garantissant un bon niveau de précision.

Une solution est de résoudre les équations de Navier-Stokes sur une gamme restreinte d'échelles et de modéliser l'action des autres. Cette séparation des échelles débouche sur différents niveaux d'approximation de la turbulence comme la simulation des grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation) et l'approche moyennée ou RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

- La première, par filtrage en espace, résout la dynamique des grandes et moyennes échelles porteuses d'énergie et utilise un modèle (dit de sous-maille) pour représenter l'action des échelles dont la taille est inférieure à celle de la maille du calcul, sur les échelles résolues. Cette méthode requiert un maillage très fin et est encore très coûteuse.
- La seconde utilise un traitement statistique : les variables du système sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Le système des équations de Navier-Stokes instantanées est alors remplacé par un système d'équations sur les valeurs moyennes du champ. Pour un écoulement stationnaire, la moyenne d'ensemble des équations de Navier-Stokes (moyenne obtenue sur un grand nombre de réalisations) peut être remplacée par une moyenne temporelle (hypothèse d'ergodicité). Dans le cas d'écoulements instationnaires, l'hypothèse d'ergodicité de la turbulence n'est plus valable et pose le problème de signification de l'URANS (Unsteady RANS).

Les non-linéarités des termes convectifs du système initial font apparaître des quantités inconnues associées à des moyennes de produits de fluctuations : les tensions de Reynolds $\overline{\rho u'_i u'_j}$, le flux de chaleur turbulent $\overline{\rho u'_i e'}$, et d'autres termes qui sont négligés (un terme τ'_{ij} , un terme de diffusion turbulente, etc.). Les termes supplémentaires doivent être modélisés pour fermer le système dans le cas d'écoulements turbulents.

La fermeture est réalisée au moyen d'un modèle de turbulence plus ou moins sophistiqué. Elle permet une diminution importante du nombre de degrés de liberté qui la rend applicable sur des configurations complexes et pour des nombres de Reynolds élevés. C'est l'approche la plus couramment utilisée dans l'industrie.

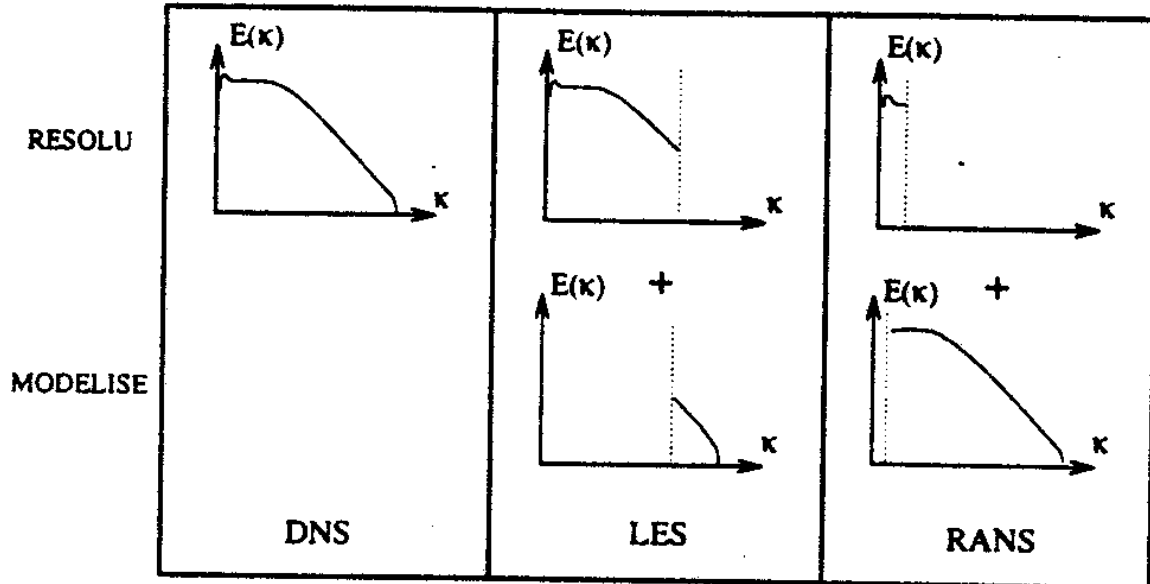


FIG. 1 – Approche DNS/LES/RANS rapportées dans l'espace spectral

2 PRESENTATION GENERALE D'UN SOLVEUR RANS

Un solveur RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) permet la simulation d'écoulements tridimensionnels, instationnaires, compressibles ou incompressibles, par résolution des équations de Navier-Stokes **moyennées** sur maillages structurés ou non par domaine. Le système est fermé par un modèle de turbulence. Nous ne parlerons ici que du cas des codes compressibles avec une discrétisation de type Volumes Finis.

L'intégration en temps est effectuée avec un schéma adapté (MacCormack, Runge-Kunta, Euler explicite...), avec un pas de temps local conditionné par un critère CFL et une phase implicite. Une technique multigrille permet l'accélération de la convergence. Pour les écoulements instationnaires, la méthode du pas de temps dual est utilisée.

La discrétisation spatiale est de type Volumes Finis avec une représentation "cell-centered" (valeur au centre de la cellule) ou "cell-vertex" (valeur aux noeuds). Le calcul des flux au travers des facettes des cellules est réalisé au moyen de différents schémas numériques centrés ou décentrés.

Une approche multi-domaine, utilisant des techniques de raccords jointifs ou autorisant le recouvrement entre domaines, permet l'emploi de maillages structurés ou non par domaine. Les conditions aux limites, appliquées par facette frontière, reposent sur la discrétisation des relations caractéristiques écrites pour les équations d'Euler tridimensionnelles.

Les équations de Navier-Stokes moyennées sont un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre pour la conservation de la masse (comme pour les équations d'Euler), et du deuxième ordre pour la conservation du moment et de l'énergie. Mise à part l'équation de conservation de la masse, les équations sont mixtes hyperboliques-paraboliques en espace et en temps (et elliptiques dans le cas stationnaire). L'équation de la conservation de la masse est hyperbolique en espace et en temps comme pour les équations d'Euler.

Le système des équations de Navier-Stokes moyennées n'admet que des **solutions continues** contrairement aux équations d'Euler où des solutions discontinues (au sens faible) sont admissibles. Les équations d'Euler sont la limite des équations de Navier-Stokes quand les termes visqueux tendent vers 0, c'est-à-dire quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Dans le cas de l'air où la viscosité cinématique est de l'ordre de $10^{-5}m^2/s$, le nombre de Reynolds est très grand pour les configurations de calculs les plus courants (souvent supérieur à 10^6 et peut atteindre 10^8). Le champ de variables d'un écoulement peut alors présenter de très fortes variations locales (correspondant aux discontinuités des équations d'Euler), dont l'épaisseur est souvent bien inférieure à la taille du maillage utilisé pour la résolution numérique : on peut estimer la taille caractéristique de ces phénomènes à l'inverse du nombre de Reynolds. Les solutions numériques des équations de Navier-Stokes moyennées peuvent donc présenter des chocs. Pour simuler correctement la topologie du choc, il faut passer aux équations de Burnett ou super-Burnett (utilisées dans des cas de détoniques).

Outre la prise en compte des phénomènes de transferts thermiques, un caractère spécifique des équations de Navier-Stokes provient de la condition limite d'adhérence imposée au contact de la paroi. En effet, la vitesse du fluide à la paroi solide est nulle (par effet de rugosité) d'où la présence de forts gradients du champ dans les régions de proche paroi dites couches limites. Dans cette zone, les effets de viscosité deviennent très importants et la turbulence se développe. L'épaisseur de la couche limite peut être estimée comme l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds, ce qui impose l'utilisation de maillages très raffinés dans les régions de paroi. Les couches limites sont la majeure source de difficultés supplémentaires des équations de Navier-Stokes par rapport aux équations d'Euler pour la simulation numérique.

3 LES EQUATIONS POUR UN ECOULEMENT TURBULENT COMPRESSIBLE

Le traitement statistique des équations instantanées conduit à décomposer chaque grandeur G , selon la formulation de Reynolds, en une partie moyenne (notée \overline{G}) et une partie fluctuante (notée g'). Pour les écoulements compressibles, on utilise une moyenne pondérée par la masse volumique (moyenne de Favre [2, 3]). Cette moyenne est définie par : $\tilde{\phi} = \frac{\rho\phi}{\bar{\rho}}$. Son utilisation évite l'apparition des fluctuations de masse volumique dans les équations. On néglige les fluctuations de la viscosité moléculaire μ . Pour simplifier les notations, nous noterons en majuscule les grandeurs moyennes.

Remarque : la moyenne pondérée par la masse est un outil mathématique et non une simplification physique. Même si la fluctuation de masse volumique a disparu des équations, cela n'élimine pas pour autant son effet sur la turbulence.

Morkovin [4] a émis l'hypothèse que, dans une couche limite, les effets de fluctuations de masse volumique sur la turbulence restent négligeables en comparaison de ceux de la masse volumique moyenne sous condition que le nombre de Mach reste inférieur à 5. La turbulence conserve ainsi un comportement incompressible.

3.1 Formulation conservative

Le système des équations de Navier-Stokes moyennées couplées avec un modèle de turbulence à deux équations de transport (k, Ψ) s'écrit, sous forme conservative :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} (F_c(w) - F_d(w, w_x, w_y, w_z)) = S(w)} \quad (1)$$

où w désigne le vecteur des variables conservatives :

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \Psi \end{pmatrix}$$

F_c les densités de flux convectif :

$$F_c = \begin{pmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho(\vec{V} \otimes \vec{V}) + p \vec{I} \\ \rho E \vec{V} + p \vec{V} \\ \rho k \vec{V} \\ \rho \Psi \vec{V} \end{pmatrix}$$

F_d les densités de flux diffusif :

$$F_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}} \\ (\overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}}) \cdot \vec{V} - \vec{q}^v - \vec{q}^t \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \text{grad } k \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\Psi}) \text{grad } \Psi \end{pmatrix}$$

Le vecteur terme source S ne concerne que les équations de transport de la turbulence :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ 0 \\ S_k \\ S_\Psi \end{pmatrix}$$

E désigne l'énergie totale (énergie cinétique + énergie interne). L'énergie cinétique de turbulence k est définie par $\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$. Les composantes S_k et S_Ψ dépendent du modèle de turbulence. Les coefficients σ_k et σ_Ψ sont des constantes.

Les modèles de turbulence sont formulés dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq (1897, c'est une hypothèse, pas un modèle!) et font intervenir la notion de viscosité turbulente μ_t . Cette hypothèse permet de relier les tensions turbulentes inconnues aux gradients de vitesse moyenne par une relation analogue à la loi de comportement liant les contraintes visqueuses au tenseur des taux de déformation. Le flux de chaleur turbulent est relié au gradient de température moyenne via la viscosité turbulente et un nombre de Prandtl turbulent P_{rt} par une relation analogue à la loi de Fourier. La modélisation du tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds) et du vecteur flux de chaleur turbulent est remplacée par celle de la viscosité turbulente selon la formulation suivante :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\tau^t}} &= \mu_t \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V})^t - \frac{2}{3}(\text{div} \vec{V})\overline{\overline{I}} \right] - \frac{2}{3}k\overline{\overline{I}} \\ \vec{q}^t &= -\frac{\mu_t}{P_{rt}}C_p \overrightarrow{\text{grad}} T\end{aligned}$$

Cette relation signifie que la turbulence réagit instantanément à une modification du champ de vitesse moyenne, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet de mémoire de la turbulence.

Le terme $\frac{2}{3}k$ s'apparente à une pression dynamique turbulente due aux mouvements d'agitation. Il est souvent associé à la pression pour former une pression modifiée $P^* = P + \frac{2}{3}\rho k$. Il est négligeable devant P en régime subsonique.

Les densités de flux diffusif sont évaluées en utilisant la loi des fluides newtoniens, l'hypothèse de Boussinesq et la loi de Fourier. Le tenseur des contraintes (somme des contraintes visqueuses et des contraintes turbulentes) $\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau^v}} + \overline{\overline{\tau^t}}$ et le vecteur flux de chaleur $\vec{q} = \vec{q}^v + \vec{q}^t$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\tau}} &= (\mu + \mu_t) \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V})^t - \frac{2}{3}(\text{div} \vec{V})\overline{\overline{I}} \right] - \frac{2}{3}k\overline{\overline{I}} \quad (2) \\ \vec{q} &= -\left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}}\right) C_p \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (3)\end{aligned}$$

où les nombres de Prandtl moléculaire et turbulent sont pris constants : $P_r = 0,72$ et $P_{rt} = 0,9$ pour l'air.

L'air est considéré comme un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$. La viscosité moléculaire est évaluée par la loi de Sutherland et ne dépend que de la température moyenne :

$$\mu(T) = \mu_{ref} \sqrt{\frac{T}{T_{ref}} \frac{1 + S/T_{ref}}{1 + S/T}}$$

avec $T_{ref} = 273.16K$, $\mu_{ref} = 1.711 \cdot 10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$ et $S = 110.4K$.

3.2 Les modèles de turbulence

Les différences entre les modèles de turbulence résident dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes configurations, dans les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans des codes de calcul. **Aucun modèle n'est satisfaisant pour tous les types de configurations.** Le choix du modèle de turbulence est donc fonction des applications visées ainsi que de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

3.2.1 La viscosité turbulente

Les modèles utilisant la notion de viscosité turbulente reposent sur l'existence, au sein des couches cisillées à grand nombre de Reynolds, d'une région assez étendue d'équilibre approximatif entre la production d'énergie turbulente (extraite des grosses structures) et la dissipation turbulente (dissipée aux petites échelles), échanges entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant :

$$\frac{\text{production}}{\text{dissipation}} \simeq 1$$

Cet équilibre production-dissipation justifie localement la notion de viscosité turbulente (argument d'isotropie locale) correspondant en fluide compressible à :

$$\tau^t = 2\mu_t S$$

avec τ^t le tenseur de Reynolds et S le tenseur des taux de déformation, dont les composantes sont définies par : $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$.

A l'équilibre strict $Production/Dissipation = 1$ dans une région de l'espace, l'expression de μ_t peut être établie de façon assez sûre. Au voisinage de $Production/Dissipation = 1$, il est toujours possible d'utiliser une modélisation plus complexe (comme le modèle $k - \varepsilon$) mais sa validité est moins certaine.

Pour $Production/Dissipation \neq 1$, tout devient compliqué!! Non seulement la possibilité de calculer simplement la valeur de μ_t disparaît, mais en plus la notion même d'une viscosité turbulente μ_t scalaire est perdue (d'où le développement de modèles plus sophistiqués avec transport des composantes du tenseur de Reynolds : les modèles RSM).

Cette viscosité turbulente est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d'une échelle de vitesse u et d'une échelle de longueur l , caractéristiques de la turbulence. Elle peut s'obtenir à partir d'une relation algébrique, d'une ou plusieurs équations de transport.

Pour l'échelle de vitesse, comme une part importante de l'énergie des fluctuations de vitesse est contenue dans les grosses structures, il est naturel de prendre une grandeur relative à l'énergie cinétique de turbulence k , soit $u \sim \sqrt{k}$.

Pour l'échelle de longueur l , plusieurs choix de variables transportées sont possibles :

- le taux de dissipation ε , $l \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$
- la dissipation spécifique ω , $l \sim \frac{\sqrt{k}}{\omega}$
- directement l'échelle de longueur l

3.2.2 Modèles algébriques

La viscosité turbulente est définie algébriquement d'après une longueur de mélange. Ces modèles ont l'avantage d'une relative robustesse et de l'économie en temps de calcul. Leur valeur prédictive est limitée mais les modèles plus précis sont complexes et coûteux.

L'échelle de longueur servant à exprimer la viscosité turbulente tend à représenter la taille des tourbillons porteurs d'énergie, c'est pourquoi elle est souvent proportionnelle à la distance à la paroi d . La détermination de cette échelle, appelée longueur de mélange " l ", est basée sur une analogie avec le libre parcours moyen dans la théorie cinétique des gaz.

L'échelle de vitesse u , pour un écoulement turbulent cisaillé en couche mince, est fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement : $u = l \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$.

Citons le modèle de Michel-Quémard-Durant [5] (1969) où la viscosité turbulente, fonction de la vorticité de l'écoulement moyen ω et des grandeurs caractéristiques de la couche limite, suit l'équation suivante :

$$\mu_t = \rho l^2 D^2(\mu_t) \omega \quad \text{avec} \quad l = 0.085 \delta \tanh \left(\frac{\kappa}{0.085} \frac{d}{\delta} \right)$$

où l est la longueur de mélange, κ la constante de von Karman=0.41, δ est l'épaisseur de la couche limite, d est la distance à la paroi et D est une fonction d'amortissement traduisant la décroissance rapide de la turbulence au voisinage de la paroi.

Un autre modèle algébrique souvent utilisé est le modèle de Baldwin-Lomax [6] (1978). La viscosité turbulente s'écrit :

$$\begin{aligned} \nu_t &= \min(\nu_{t_i}, \nu_{t_e}) \\ \nu_{t_i} &= (\kappa d D(d))^2 \omega \\ \nu_{t_e} &= C_{Clauser} C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(d) \end{aligned}$$

avec F_{wake} une fonction de sillage, $D(d)$ la fonction d'amortissement de van Driest, $C_{Clauser}$ la constante de Clauser = 0.0168, C_{cp} une constante = 1.6 et F_{Kleb} la fonction de Klebanoff.

Ce modèle peut générer des oscillations numériques.

3.2.3 Modèle à 1 équation : le modèle de Spalart-Allmaras (1992)

Ce modèle utilise une seule équation de transport pour la quantité $\tilde{\nu}$ qui, loin des parois, se confond avec la viscosité turbulente ν_t . L'équation pour $\tilde{\nu}$ résulte d'une construction pas à pas par ajout de termes destinés à prendre en compte de plus en plus de phénomènes physiques. Partant d'une forme "convection=production+diffusion" pour les écoulements libres, Spalart [7, 8] ajoute les termes nécessaires pour obtenir une région logarithmique dans les profils de vitesse puis les termes de correction de faible nombre de Reynolds de turbulence pour la région de proche paroi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \text{div} \left[\vec{V} \rho \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \text{grad} \tilde{\nu} \right] &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \text{grad} \rho \tilde{\nu} \cdot \text{grad} \tilde{\nu} \\ &\quad - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \rho \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} & \quad ; \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} & \quad ; \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu} \\ \tilde{S} = |\text{rot} \vec{V}| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} & \quad ; \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} & \quad ; \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \\ f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} & \quad ; \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) & \quad ; \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \end{aligned}$$

Les constantes :

$$\begin{aligned} c_{b1} = 0,1355 & \quad ; \quad c_{b2} = 0,622 & \quad ; \quad \sigma = \frac{2}{3} & \quad ; \quad \kappa = 0,41 \\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + (1 + c_{b2})/\sigma & \quad ; \quad c_{w2} = 0,3 & \quad ; \quad c_{w3} = 2 \\ c_{v1} = 7,1 & \quad ; \quad c_{t3} = 1,1 & \quad ; \quad c_{t4} = 2 \end{aligned}$$

3.2.4 Modèles à 2 équations de transport

Actuellement, ces modèles sont les plus répandus dans les codes RANS. Dans ces équations, la variable d désigne la plus petite distance à la paroi. Dans le sillage d'un profil, d est la distance au bord de fuite.

Le modèle $k - \varepsilon$ de Jones-Launder (1972)

Ce modèle, très largement utilisé, a été développé à l'origine pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradients de pression favorables [9].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho k \vec{V} - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \operatorname{grad} k \right] &= P_k - \rho \tilde{\varepsilon} - D \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho \tilde{\varepsilon} \vec{V} - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \operatorname{grad} \tilde{\varepsilon} \right] &= c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - \rho c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E\end{aligned}$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$\rho \varepsilon = \mu \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$$

Le terme D est introduit pour intégrer la quantité $\tilde{\varepsilon}$, grandeur interprétée comme la partie isotrope de la dissipation. Elle a l'avantage de tendre vers zéro à la paroi ce qui simplifie l'écriture de la condition au limite.

$$D = 2\nu \left(\operatorname{grad} \sqrt{k} \right) \cdot \left(\operatorname{grad} \sqrt{k} \right) \quad ; \quad \rho \tilde{\varepsilon} = \rho \varepsilon - D$$

La viscosité turbulente, la production de k et le terme de bas nombre de Reynolds de turbulence E vérifient :

$$\begin{aligned}\mu_t &= \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad ; \quad P_k = \overline{\tau^t} : \operatorname{grad} \vec{V} \\ E &= 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\overline{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{grad} \vec{V} \right) \right) : \left(\overline{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{grad} \vec{V} \right) \right)\end{aligned}$$

Les fonctions d'amortissement sont reliées au nombre de Reynolds de turbulence :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad ; \quad f_\mu = \exp \left(\frac{-2,5}{1 + R_t/50} \right) \quad ; \quad f_2 = 1 - 0,3 \exp(-R_t^2)$$

Les constantes :

$$c_\mu = 0,09 \quad ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,57 \quad ; \quad C_{\varepsilon 2} = 2 \quad ; \quad \sigma_k = 1 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

L'échelle de temps caractéristique $\mathcal{T} = k/\varepsilon$ représente la durée nécessaire pour dissiper un tourbillon porteur d'une énergie cinétique turbulente k .

Il existe de nombreux modèles $k - \varepsilon$ (Jones-Launder, Launder-Sharma, Nagano, Chieng, Shih...). Les différences majeures entre ces modèles concernent les valeurs des constantes et les fonctions d'amortissement utilisées.

Le modèle $k - \varepsilon$ réalisable

Les conditions de réalisabilité expriment que les fluctuations de vitesse au carré doivent être positives et que les corrélations croisées doivent vérifier l'inégalité de Schwartz. Appliquées à un modèle de turbulence $k - \varepsilon$, les conditions pour assurer la réalisabilité dans un écoulement tridimensionnel sont (voir [10]) :

$$C_\mu \leq \frac{1}{s\sqrt{3}} \quad ; \quad s = \frac{k}{\varepsilon} S \quad ; \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}S_{kk}^2$$

Ceci permet d'obtenir un modèle faiblement non-linéaire avec un coefficient C_μ fonction du tenseur de déformation adimensionné :

$$C_\mu = \min \left(C_\mu^o, \frac{c}{s\sqrt{3}} \right) \quad \text{avec} \quad c \leq 1$$

où C_μ^o est égale à 0.09.

Le modèle $k - \omega$ de Wilcox(1988)

Ce modèle [11] présente le grand avantage de ne pas comporter de fonction d'amortissement dans les seconds membres des équations de transport ni dans l'expression de la viscosité turbulente. Par contre, il est très sensible à la condition limite à imposer sur ω aux frontières des couches limites et des sillages.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[\rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad} k \right] &= P_k - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad} \omega \right] &= \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 \\ \text{avec} \quad \mu_t &= \frac{\rho k}{\omega} \end{aligned}$$

Les constantes :

$$\alpha = \frac{5}{9} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{40} \quad ; \quad \beta^* = 0,09 \quad ; \quad \sigma = \sigma^* = 0,5$$

La condition limite à la paroi pour la dissipation spécifique est :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$$

Le modèle $k - \omega$ de Menter avec correction SST (1992)

Il s'agit d'un modèle bicouche, $k - \omega$ de Wilcox et $k - \varepsilon$ de Launder-Sharma, développé pour remédier au problème de sensibilité à la valeur de ω_e à l'extérieur des couches limites. Menter [12] espère ainsi conserver le bon comportement du modèle de Wilcox dans la région interne des couches limites et obtenir une condition limite insensible au niveau de ω_e . Ceci constitue le modèle BSL de Menter :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div} \left[\rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad} k \right] &= P_k - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \text{div} \left[\rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad} \omega \right] &= \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 \\ &+ 2 \frac{\rho \sigma \omega}{\omega} \text{grad} k \cdot \text{grad} \omega \end{aligned}$$

Menter ajoute en plus une correction dite SST pour "Shear Stress Transport". Elle repose sur la constatation que pour les modèles de turbulence à deux équations de transport utilisant la notion de viscosité turbulente, le rapport de la contrainte de cisaillement τ à la valeur de ρk est égale à :

$$\frac{\tau}{\rho k} = \sqrt{C_\mu \frac{P_k}{\varepsilon}} \quad ; \quad C_\mu = 0,09$$

alors qu'expérimentalement ce rapport est plutôt $\tau/\rho k \simeq \sqrt{C_\mu} = 0,3$ dans une grande partie de la couche limite. Dans le cas d'écoulements en présence de gradients de pression positifs, le rapport production sur dissipation peut être nettement supérieur à 1 ce qui conduit à surestimer la contrainte de cisaillement et donc, indirectement, à sous-estimer l'effet des gradients de pression positifs.

Pour pallier cette incohérence, Menter [13] propose de limiter le coefficient de viscosité turbulente dans la région externe des couches limites :

$$\mu_t = \frac{\rho k / \omega}{\max\left(1, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega}\right)}$$

La fonction F_1 permet de passer du modèle $k-\omega$ à la paroi ($F_1 = 1$) au modèle $k-\varepsilon$ à l'extérieur ($F_1 = 0$) et la fonction F_2 limite la valeur de la viscosité turbulente. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} F_1 = \tanh(\zeta^4) & \quad \text{avec} & \quad \zeta = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma_\omega 2k}{D_\omega y^2} \right] \\ & \quad \text{et} & \quad D_\omega = \max \left(\frac{\rho\sigma_\omega 2}{\omega} \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega; 10^{-20} \right) \\ F_2 = \tanh(\iota^4) & \quad \text{avec} & \quad \iota = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) \end{aligned}$$

Les constantes, indicées 1 pour le modèle de Wilcox et 2 pour le modèle de Launder Sharma s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi &= F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \\ \sigma_1^* &= 0,5 \quad ; \quad \sigma_1 = 0,5 \quad ; \quad \beta_1 = 0,075 \quad ; \quad \sigma_{\omega_1} = 0 \\ \sigma_2^* &= 0,85 \quad ; \quad \sigma_2 = 0,856 \quad ; \quad \beta_2 = 0,0828 \quad ; \quad \sigma_{\omega_2} = 0,856 \\ \kappa &= 0,41 \quad ; \quad a_1 = \sqrt{\beta^*} = 0,3 \quad ; \quad \gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta^*} - \sigma_i \frac{\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad \text{pour } i=1,2 \end{aligned}$$

Remarque : la correction SST de Menter peut être appliquée à n'importe quel modèle de turbulence à deux équations.

Formules de conversion

Elles reposent sur la définition de la viscosité turbulente pour chacun des modèles, en négligeant les corrections de faible nombre de Reynolds de turbulence :

$$\begin{aligned} k - \varepsilon & : \quad \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \\ k - \omega & : \quad \mu_t = \rho k / \omega \\ Spalart - Allmaras & : \quad \mu_t = \rho \tilde{\nu} \end{aligned}$$

3.2.5 Modèles au second ordre - RSM

Les modèles RSM (Reynolds Stress Model) reposent sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces équations de transport sont obtenues en soustrayant de l'équation de $u'_i u'_j$ l'équation de $U_i U_j$ et en prenant la moyenne de Reynolds (ou de Favre) du résultat. L'équation s'écrit alors sous forme compacte :

$$C_{ij} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + Dt_{ij} + Dp_{ij} + D\nu_{ij}$$

Cette équation comprend deux types de terme : ceux exprimables sous forme de divergence de tenseurs qui représentent le transport d'une quantité (termes Dt_{ij} , Dp_{ij} et $D\nu_{ij}$ dont l'intégrale reste nulle sur l'ensemble de l'écoulement) et ceux qui jouent le rôle de sources et de puits (termes P_{ij} , ϕ_{ij} et ε_{ij} dont l'intégrale est non nulle).

Les différents termes sont :

- C_{ij} : terme de convection.
- P_{ij} : production résultant du travail des tensions de Reynolds.
- ϕ_{ij} : terme de redistribution par la pression.
- ε_{ij} : terme de dissipation due à la viscosité du fluide.
- Dt_{ij} : diffusion turbulente qui est une convection au niveau des agitations turbulentes.
- Dp_{ij} : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression.
- $D\nu_{ij}$: diffusion moléculaire.

À part la production, tous ces termes nécessitent d'être modélisés. Il est aussi nécessaire de résoudre l'équation de transport exacte pour ε et d'introduire des modèles à bas nombre de Reynolds de turbulence (fonctions d'amortissement de la turbulence).

Les principales qualités d'un modèle RSM sont ses capacités à prédire des écoulements différents les uns des autres (plus grande universalité). Il permet une meilleure modélisation physique de l'écoulement puisqu'il prend en compte l'anisotropie au voisinage de la paroi.

L'inconvénient majeur de ces modèles est le coût en temps de calcul et en mémoire car ils requièrent la résolution de 6 nouvelles équations. Un autre défaut est le manque de robustesse dans la résolution numérique.

Une alternative pourrait être l'utilisation de modèles ARSM (Algebraic Reynolds Stress Model) où les tensions de Reynolds sont obtenues à partir d'expressions algébriques déduites de leurs équations de transport.

3.2.6 Aspects thermiques

Il existe différentes modélisations du flux de chaleur turbulent. Deux démarches sont principalement utilisées :

- la première est basée sur l'hypothèse de Boussinesq et permet de relier le flux de chaleur turbulent au gradient de température moyenne par une loi de type Fourier (modèles algébriques ou à équations de transport).

Les composantes du vecteur flux de chaleur turbulent q_i^t vérifient :

$$q_i^t = -C_p \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

où α_t est la diffusivité thermique turbulente (de même dimension que la viscosité turbulente μ_t). Il reste alors à modéliser le scalaire α_t .

Les codes du commerce utilisent principalement une modélisation algébrique de α_t basée sur une analogie avec les phénomènes moléculaires où la diffusivité est proportionnelle à la viscosité μ slon l'expression $P_r = \frac{\mu}{\alpha}$ où P_r désigne le nombre de Prandtl moléculaire. Une loi analogue est utilisée pour lier α_t et μ_t dont le facteur de proportionnalité est appelé nombre de Prandtl turbulent P_{rt} :

$$P_{rt} = \frac{\mu_t}{\alpha_t}$$

Généralement, le nombre P_{rt} est pris égal à 0,9 pour l'air. Cette relation implique que les phénomènes cinématiques et thermiques possèdent la même échelle de vitesse. Ceci semble cohérent puisque les grosses structures porteuses de l'énergie cinétique turbulente transporte également l'énergie thermique turbulente.

Remarque : des résultats expérimentaux ont montré que le nombre P_{rt} n'était pas constant et pouvait varier fortement près des parois dans des cas avec transferts de chaleur. Un modèle plus sophistiqué peut s'avérer nécessaire pour des calculs présentant de forts gradients thermiques (paroi chauffée par exemple).

Pour s'affranchir d'une analogie complète entre les champs cinématique et thermique, les échelles de vitesse et de temps servant à construire le scalaire α_t seront bâties à la fois sur des grandeurs cinématiques et thermiques turbulentes. Comme les structures porteuses de l'énergie cinétique de turbulence sont aussi celles qui transportent l'énergie thermique turbulente, on choisit la même échelle pour ces phénomènes à savoir $u \sim \sqrt{k}$. Par conséquent, il est nécessaire de résoudre les équations de transport pour k et ε .

L'échelle de temps choisie tient à la fois compte de l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs cinématiques : $\mathcal{T} = \frac{k}{\varepsilon}$ et de l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dissipatifs thermiques : $\mathcal{T}_\theta = \frac{\overline{\theta^2}}{2\varepsilon_\theta}$. On note θ les fluctuations de température T' et la quantité $\overline{\theta^2}$ s'appelle la variance de la fluctuation de température. Le temps \mathcal{T}_θ représente le temps mis pour dissiper la variance de la fluctuation de température. Son taux de dissipation, ε_θ , est défini par :

$$\rho\varepsilon_\theta = \alpha \overline{\frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial\theta}{\partial x_i}}$$

Les échelles \mathcal{T} et \mathcal{T}_θ apparaissent avec les poids respectifs m et p dans l'expression de la diffusivité thermique turbulente :

$$\alpha_t = C\rho k \mathcal{T}^m (2\mathcal{T}_\theta)^p$$

avec $m + p = 1$. Les valeurs de m et p diffèrent selon les modèles, ce qui permet de donner plus ou moins de poids à l'un des deux phénomènes. Cette relation implique la résolution de deux nouvelles équations de transport : celles de $\overline{\theta^2}$ et de ε_θ (soit au total 4 équations de transport avec k et ε).

Il existe plusieurs modélisations de ces équations de transport qui nécessitent, comme pour la modélisation cinématique, des termes à bas nombre de Reynolds de turbulence.

- l'autre démarche consiste à résoudre les équations de transport du flux de chaleur turbulent (modèles au second ordre équivalent aux modèles RSM).

3.2.7 Ecoulements instationnaires - URANS

Les simulations numériques de type URANS (Unsteady RANS) soulèvent de nombreuses questions. Cette approche consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées instationnaires, sans modification du modèle de turbulence par rapport au cas stationnaire. Le traitement statistique de Reynolds induit une séparation d'échelles à basse fréquence et ne permettrait de représenter au mieux que des phénomènes instationnaires basses fréquences (inférieure au kHz). L'approche URANS sous-entend ainsi qu'il y a un découplage entre l'instationnarité du champ moyen et de la turbulence. D'autre part, l'hypothèse d'ergodicité de la turbulence (qui permet de remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle) n'est plus valide lorsque l'écoulement moyen est instationnaire.

Les modèles classiques type $k - \varepsilon$ sont fondés sur un équilibre spectral de la turbulence (Kolmogorov) et sont **tous** calibrés pour des écoulements stationnaires. La présence de structures organisées (dites cohérentes), en écoulement instationnaire, peut rompre cet équilibre. Il est souvent observé que les modèles classiques produisent trop de viscosité turbulente. Ceci a pour effet de modifier la topologie de l'écoulement, de réduire les décollements et de limiter le développement des instationnarités. Plusieurs solutions sont envisageables pour tenter de réduire la viscosité turbulente :

- la correction SST de Menter (voir précédemment)
Cette correction n'est valable que pour des écoulements 2D.
- un limiteur arbitraire sur la viscosité turbulente μ_t (à éviter !) ou une baisse du coefficient C_μ pour les modèles $k - \varepsilon$
La valeur courante de ce coefficient est 0,09. Comme la viscosité turbulente est proportionnelle à ce coefficient, sa diminution revient à réduire μ_t .
- une condition de réalisabilité
La notion de réalisabilité exprime les conditions nécessaires pour qu'une quantité puisse être une corrélation de grandeurs fluctuantes. Lorsqu'on examine les tensions turbulentes, on constate que les modèles classiques à deux équations de transport peuvent donner des solutions non réalisables dans la région du bord d'attaque d'un profil, entraînant une surproduction d'énergie cinétique de turbulence.

Une autre possibilité est d'employer des modèles de turbulence plus sophistiqués qui peuvent prendre en compte des déséquilibres de la turbulence (RSM, ARSM, modèles non linéaires) ou d'utiliser d'autres approches : la LES, la DES (Detached Eddy Simulation) développée par Spalart, qui couple un calcul RANS près des parois avec un calcul LES, l'OES (Organized Eddy Simulation) développée notamment par Ha Minh, qui décompose les structures selon leur nature (cohérentes ou non).

3.3 Les lois de parois

3.3.1 Problématique

Pour bien prendre en compte toute la physique d'un écoulement turbulent, il est nécessaire d'utiliser un maillage très raffiné près des parois. En effet, la région interne de la couche limite turbulente est le siège de forts gradients de la vitesse, de la température et des grandeurs turbulentes, suivant la direction y perpendiculaire à la paroi. Au proche voisinage de la paroi, l'énergie cinétique de turbulence k évolue comme y^2 . Elle présente un pic autour de $y^+ \simeq 10 \sim 20$ comme la production de k . La contrainte de cisaillement turbulente évolue comme y^3 . La sous-couche visqueuse est le siège d'une forte dissipation liée à la présence de petites structures dissipatives ; la dissipation ε varie rapidement tout près de la paroi et atteint son maximum à la paroi.

Aussi, le maillage doit absolument comporter des points dans la sous-couche visqueuse. Usuellement, les maillages pour des calculs RANS ont une hauteur de première maille h_1^+ proche de l'unité en variable de paroi. Pour le modèle $k - \varepsilon$ de Jones-Launder, il est même souhaitable d'avoir h_1^+ autour de 0,3 (voir travaux de Bardina et al [14]). Une telle condition impose des contraintes sévères pour la construction du maillage. De plus, le respect de la condition CFL entraîne un pas de temps d'intégration local très petit dans les mailles les plus fines, ce qui ralentit fortement la vitesse de convergence des méthodes de résolution non totalement implicites.

3.3.2 Rappel des propriétés des couches limites turbulentes 2D incompressibles

Le principe de base du traitement de paroi repose sur l'existence, bien établie pour les couches limites turbulentes bidimensionnelles incompressibles pas trop près du décollement, d'une relation universelle reliant la vitesse à la distance à la paroi par l'intermédiaire du frottement pariétal.

On introduit la vitesse de paroi et la longueur de paroi, grandeurs adimensionnées par les échelles de paroi :

$$U^+ = U/U_\tau \quad ; \quad y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_p} \quad ; \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}$$

Selon l'importance relative des composantes laminaire et turbulente du tenseur des contraintes, la région interne de la couche limite se sépare en trois zones distinctes :

- **La sous-couche visqueuse** : $y^+ < 5$

Il s'agit une zone de faible épaisseur où l'action de la viscosité prédomine. Dans ce film visqueux, le profil de vitesse de paroi suit une loi linéaire :

$$U^+ = y^+$$

- **La zone de turbulence développée** : $40 < y^+$ et $y/\delta < 0,2$

Dans cette région, les effets turbulents prédominent sur les effets visqueux. Il est difficile de déterminer avec précision l'étendue de cette zone, son épaisseur varie en fonction du nombre de Reynolds et du gradient de pression.

Dans cette zone, le profil de vitesse suit une loi logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

Les constantes κ et C , déterminées expérimentalement, sont indépendantes du nombre de Reynolds. La constante κ , appelée constante de von Karman, est très proche de 0,41 et $C \simeq 5.25$.

Cette loi s'obtient soit par l'analyse dimensionnelle soit par la théorie des développements asymptotiques raccordés ([15]). Elle reste valable même pour des gradients de pression positifs intenses conduisant au voisinage du décollement de la couche limite. Dans une zone décollée, cette loi n'est plus valide.

- **La zone tampon** : $5 < y^+ < 40$

C'est la zone de raccord entre les deux régions précédentes où coexistent les propriétés de la sous-couche visqueuse et de la zone logarithmique.

Dans la région interne, pour $y/\delta < 0,2$, le profil des vitesses suit donc une loi $U^+ = f(y^+)$, propriété fondamentale de la couche limite turbulente. Cette loi, dite "universelle", est indépendante de toutes les conditions dans lesquelles peut se développer la couche limite.

3.3.3 Effets de compressibilité

Pour les écoulements compressibles, on utilise la vitesse transformée \bar{U} de van Driest [16, 17], définie par :

$$\bar{U} = \int_0^{U_t} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} dU_t$$

L'indice 't' désigne la composante tangentielle dans le repère paroi. Pour intégrer le rapport ρ/ρ_p , il faut connaître l'évolution de la température dans la région de paroi. L'évolution du flux de chaleur local, dans le repère paroi, peut s'obtenir par exemple en négligeant la convection dans l'équation de l'énergie. On obtient alors une équation différentielle pour la température en fonction de la vitesse.

3.3.4 Principe

Le principe des lois de paroi est ainsi de remplacer le calcul des densités de flux diffusif et des grandeurs turbulentes transportées dans la première cellule du maillage, dont l'évaluation précise exige un fort raffinement du maillage, par un autre calcul reposant sur des propriétés de la couche limite turbulente. Ceci permet d'utiliser un maillage moins raffiné près de la paroi avec des hauteurs de maille y^+ comprises entre 50 et 150.

4 RESOLUTION NUMERIQUE

4.1 Intégration temporelle

4.1.1 Phase explicite

Le système est résolu de façon explicite en temps par un schéma, par exemple le schéma de Runge-Kutta à 4 pas. La solution w^{n+1} au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ est calculée selon :

$$\begin{aligned}w^{(0)} &= w^n \\w^{(k)} &= w^{(k-1)} - a_k \Delta t \operatorname{div} (F_c^{(k-1)} - F_d^{(0)} - S^{(0)}) \quad \text{pour } k=1 \text{ à } 4 \\w^{n+1} &= w^{(4)}\end{aligned}$$

avec : $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = 1$.

Le choix des coefficients conduit à une précision d'ordre 2 en temps. Les termes visqueux et le terme source sont calculés uniquement au premier pas puis figés.

4.1.2 Pas de temps local

Afin d'accélérer la convergence des calculs, le pas de temps Δt utilisé pour intégrer les équations est un pas de temps local. Il est déterminé à partir d'une étude de stabilité de von Neumann sur une équation de convection et une équation de diffusion.

Chaque équation est intégrée à l'aide du schéma explicite sur une grille uniforme. L'étude de stabilité conduit à une condition de type critère de Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Ces deux conditions de stabilité représentent les limites visqueuse et non visqueuse du critère de stabilité utilisé pour le calcul du pas de temps local. La formulation, pour chaque point du maillage, est :

$$\Delta t = CFL \min \left[\underbrace{\frac{\Delta x}{\rho(A)}}_{\text{terme convectif}}, \underbrace{\frac{\rho \Delta x^2}{2\gamma \left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right)}}_{\text{terme diffusif}} \right]$$

où : Δx désigne la taille de maille et $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice jacobienne du flux convectif, écrite pour les équations d'Euler. CFL doit être inférieur au CFL_{max} , limite supérieure de la zone de stabilité du schéma numérique. Soulignons que la solution perd tout son sens physique tant que la convergence vers une solution stationnaire n'est pas complètement atteinte. Pour les calculs instationnaires, la méthode du pas de temps dual permet d'utiliser un pas de temps local dans les itérations en temps fictif.

4.1.3 Phase implicite

Cette phase implicite préserve les propriétés conservatives et la précision de la solution explicite, tout en accélérant la convergence du calcul. Son emploi permet d'augmenter le CFL sans perte de stabilité. Exemple : phase implicite sans matrice (cf. polycopié 2A sur résolution des équations d'Euler), le lissage implicite des résidus (ou IRS pour Implicit Residual Smoothing) de Lerat [18].

Le lissage des résidus consiste à résoudre un système linéaire sur les résidus provenant de la phase explicite. Ce système s'écrit en monodimensionnel :

$$\left[1 + \frac{\beta}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \delta \left(\rho(A_{i+1/2}^2 \delta) \right) \right] R_i^{imp} = R_i^{exp}$$

où β est le coefficient de la phase implicite (la stabilité du schéma RK à m pas de temps impose une valeur supérieure à $1/2^{m-1}$), l'opérateur δ est un opérateur de différence en espace : $\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$, $\rho(A_{i+1/2})$ est le rayon spectral de la matrice jacobienne des flux convectifs sur l'interface $i + 1/2$, R_i^{imp} et R_i^{exp} sont respectivement les résidus obtenus par les phases implicite et explicite au point i .

En multi-dimensionnel, on utilise une factorisation par direction alternée (ADI pour Alternating Direction Implicit) :

$$\left\{ \prod_{l=i,j,k} \left[1 + \frac{\beta}{2} \frac{\Delta t^2}{Vol^2} \delta_l (\rho_C^2 \delta_l) + \beta_V \frac{\Delta t}{Vol^2} \delta_l (\rho_V \delta_l) \right] \right\} R_i^{imp} = R_i^{exp}$$

où l'indice l décrit les trois directions i, j, k , Vol désigne le volume de la cellule, β et β_V sont les coefficients de la phase implicite (une valeur usuelle est 0,15 pour le schéma RK4), ρ_C et ρ_V sont respectivement les rayons spectraux des matrices jacobiennes des flux convectifs et visqueux associé à la face, δ_l est l'opérateur de différence en espace dans la direction l .

Cette équation implique l'inversion de trois systèmes matriciels de type tridiagonal scalaire (un système par direction d'indice) dont la résolution est réalisée au moyen de l'algorithme de Thomas. L'erreur de dispersion est d'autant plus importante que le coefficient β est grand (usuellement utilisation de valeurs proches du seuil de stabilité).

4.1.4 Ecoulements instationnaires - Pas de temps dual

Les calculs avec un schéma explicite en temps sont pénalisés par la condition de stabilité avec un critère de type CFL. En effet, ce dernier est fonction de la taille des plus petites cellules du maillage qui atteint de fort raffinement près des parois. Les lois de paroi, par l'utilisation de maillages dégrossis, s'avèrent ainsi très intéressantes. Par ailleurs, il n'est plus possible de recourir à la technique du pas de temps local ainsi qu'à la méthode multigrille non consistantes en temps.

Pour pallier ces difficultés, Jameson a développé l'approche du pas de temps dual pour la résolution des équations d'Euler [19]. Cette méthode, étendue aux équations de Navier-Stokes, offre la possibilité d'utiliser les techniques d'accélération de la convergence, notamment le multigrille, introduites pour les problèmes stationnaires. L'introduction d'un temps dual permet de transformer le problème instationnaire en temps physique en un problème stationnaire en temps dual, sans signification physique réelle. A chaque pas de temps physique, des sous-itérations avec technique multigrille sont réalisées, dans le domaine dual, pour approcher la solution stationnaire. Cette méthode du pas de temps dual assure une précision en temps d'ordre 2.

For unsteady computations, the dual time stepping method is used to overcome the lack of numerical efficiency of the global time stepping approach. The unsteady solution of the RANS equations is computed as the steady solution of the system :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial t} + R(w) = 0$$

where $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ is the derivative with respect to the dual time variable τ and $R(w)$ is the residual.

The derivative $\frac{\partial w}{\partial t}$ with respect to the physical time t is discretized by a second-order formula :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t}$$

where the superscript n is associated with the physical time. Between each time step, the solution is advanced in a dual time τ and acceleration strategies developed for steady problems can be used to speed up the convergence in fictitious time. The initialization of the derivative with respect to the physical time is done with a first-order formula.

4.2 Discrétisation spatiale des flux convectifs

La formulation en Volumes Finis consiste à intégrer le système (1) sur une cellule de volume Ω , de surface Σ , et de normale extérieure \vec{n} . Le théorème d'Ostrogradski conduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w d\Omega + \oint_{\Sigma} F_c \cdot \vec{n} d\Sigma - \oint_{\Sigma} F_d \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (4)$$

La discrétisation en espace revient à calculer le bilan des flux numériques sur une cellule élémentaire. Ce bilan comprend la somme des contributions de chaque face de la cellule. Les densités de flux sont supposées constantes sur chaque facette. Il vient :

$$\oint_{\Sigma} (F_c - F_d) \cdot \vec{n} d\Sigma = \sum_{\text{facettes}} (F_c - F_d)_{\text{facette}} \cdot \vec{n}_{\text{facette}} \Sigma_{\text{facette}}$$

Avec un schéma centré, la densité de flux sur une facette est égale à la demi-somme des densités de flux évaluées au centre des cellules adjacentes à cette facette (voir figure 2) :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2}(F(w_D) + F(w_G))$$

où w_D et w_G sont les vecteurs des variables conservatives des cellules gauche et droite.

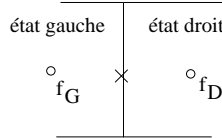


FIG. 2 – interface entre deux cellules

L'utilisation d'un tel schéma entraîne une erreur de troncature d'ordre 2 en espace. Cette erreur dégénère d'un ordre sur les frontières. Ce schéma est instable et nécessite l'introduction d'une dissipation artificielle pour le stabiliser.

Il est possible d'employer le schéma décentré de Roe (1981) pour le calcul des densités de flux convectif. Ce schéma est de type "flux difference splitting". Il consiste à résoudre de façon approchée un problème de Riemann à l'interface de deux états distincts [20]. La densité de flux sur une facette, suivant les notations de la figure (2), est définie par :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2} \left[F(w_D) + F(w_G) - |\tilde{A}| (w_D - w_G) \right]$$

où \tilde{A} est une matrice évaluant la matrice jacobienne A des flux convectifs sur l'interface, calculée à partir des variables obtenues par la moyenne de Roe. En appelant $\text{diag}(\lambda_{\tilde{A}})$ la matrice diagonale des valeurs propres de \tilde{A} et \tilde{T} la matrice des vecteurs propres à droite, la densité de flux s'écrit :

$$F(w_G, w_D) = \frac{1}{2} \left[F(w_D) + F(w_G) - \tilde{T} \text{diag}(|\lambda_{\tilde{A}}|) \tilde{T}^{-1} (w_D - w_G) \right]$$

Ce schéma est précis au premier ordre. D'autre part, sa forme initiale autorise la création de choc de détente et il n'est donc pas entropique. Une correction d'entropie, de type Harten [21] peut être ajoutée pour remédier à ce problème. Elle consiste à remplacer le module des valeurs propres lorsqu'elles se rapprochent de zéro par une fonction parabolique non nulle. Ainsi, pour chaque valeur propre λ_i , on utilise le module défini par :

$$|\lambda_i|_{Harten} = \begin{cases} |\lambda_i| & \text{si } \lambda_i < -\delta \\ 0.5 \left(\frac{\lambda_i^2}{\delta} + \delta \right) & \text{si } -\delta \leq \lambda_i \leq \delta \\ |\lambda_i| & \text{si } \lambda_i > \delta \end{cases}$$

où δ est un coefficient numérique qui doit être ajusté en fonction des conditions d'écoulement. Cette dissipation supplémentaire nuit à la précision des résultats, notamment dans la zone de couche limite dominée par les effets visqueux. Il est donc souhaitable de réduire le plus possible ce paramètre.

De plus, afin d'obtenir une précision à un ordre plus élevé, une extension du schéma par extrapolation MUSCL peut être utilisée (cf. polycopié 2A).

Dissipation artificielle

Pour stabiliser le schéma centré, l'introduction d'une dissipation artificielle est nécessaire. La formulation de Jameson-Schmidt-Turkel [22] est la plus couramment utilisée. Le terme de dissipation est divisée en deux parties :

- un terme de différence quatrième des grandeurs conservatives dans le but d'amortir les instabilités numériques engendrées par la non-linéarité des équations. On peut le manipuler par un coefficient χ_4 pris usuellement entre 0.008 et 0.064.
- un terme de différence seconde pour capter correctement les discontinuités de l'écoulement, comme une onde de choc. On fait varier ce terme par l'intermédiaire d'un coefficient χ_2 compris entre 0 (pour les configurations sans choc) et 1.

L'addition des termes de dissipation ne réduit pas la précision numérique sauf près des discontinuités où le schéma est localement précis à l'ordre 1.

Dans le cas de mailles très allongées, il est possible d'utiliser la correction de Martinelli.

4.3 Discrétisation spatiale des termes visqueux

La discrétisation des flux visqueux consiste à approximer les variables et les dérivées des variables par rapport aux directions x et y (en écoulement 2D). Par exemple, à l'interface $(i + 1/2, j)$, pour toute quantité f :

$$\begin{aligned} - f_{i+1/2,j} &= \frac{f_{i,j} + f_{i+1,j}}{2} \quad (\text{schéma centré}) \\ - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x_i} \\ - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i+1/2,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1} + f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{4\Delta y} \end{aligned}$$

Ces discrétisations sont du second ordre.

4.4 Multigrille

4.4.1 Principe

Pour accélérer la convergence des calculs, une méthode multigrille peut être utilisée. L'idée fondamentale de cette méthode est basée sur les deux observations suivantes :

- Les méthodes itératives classiques pour la résolution de problèmes elliptiques ont un effet de lissage de l'erreur au cours des itérations. Si l'erreur commise au cours d'un calcul est décomposée en série de Fourier, on observe que les hautes fréquences de l'erreur sont amorties beaucoup plus vite que les basses fréquences. Ainsi, lors d'un calcul, il est possible d'obtenir un bon lissage (suppression des hautes fréquences) tout en ayant une convergence lente, à cause des basses fréquences.
- dans un calcul, une approximation de la solution s'obtient plus rapidement sur un maillage grossier, mais avec une perte de précision, que sur un maillage fin. Cependant, les basses fréquences relatives au maillage fin deviennent les hautes fréquences pour le maillage grossier et seront donc bien lissées sur ce maillage.

La méthode multigrille permet, à travers un algorithme basé sur une séquence de grilles de tailles différentes, de lisser de façon optimale toutes les fréquences de l'erreur. Sur la grille la plus grossière, la résolution du système se fait de façon exacte. Les transferts de l'erreur et la solution approchée sur les différentes grilles se font à l'aide d'opérateurs d'interpolation.

Pour des calculs instationnaires, cette technique est utilisable avec la méthode du pas de temps dual.

4.4.2 Description de l'algorithme multigrille

Considérons une séquence de grilles de plus en plus grossières $G_{2h}, G_{4h}, G_{2^i h} \dots$ pour lesquelles la taille caractéristique des mailles de chaque grille $G_{2^i h}$ est deux fois plus grande que celles des mailles de la grille précédente $G_{2^{i-1} h}$.

A partir de la méthode numérique de résolution associée au niveau fin G_h , la méthode d'accélération multigrille consiste à utiliser les niveaux grossiers afin de calculer les corrections à apporter à la solution du niveau fin. Les corrections sont calculées par l'application du schéma d'intégration temporelle sur les niveaux grossiers (par exemple le schéma de Runge-Kutta). La technique FAS ("Full Approximation Storage") est couramment utilisée [23]; elle réside dans le fait que les équations à résoudre sur les grilles grossières sont semblables aux équations à résoudre sur la grille fine, à l'adjonction près d'un terme dit "forcing function", qui représente l'écart des erreurs de troncature entre deux grilles successives.

Les différentes étapes d'un calcul sur deux niveaux de grille sont :

- réalisation d'itérations du schéma temporel (on prendra ici le schéma de Runge-Kutta à 4 pas de temps) avec la phase implicite sur la grille fine G_h .
- phase de restriction de la solution w_h et des résidus $R(w_h)$ de G_h sur G_{2h} .

$$\begin{aligned}w_{2h} &= I_h^{2h} w_h \\ R(w_{2h}) &= J_h^{2h} R(w_h)\end{aligned}$$

où I_h^{2h} et J_h^{2h} sont respectivement les opérateurs de restriction de la solution et des résidus du niveau G_h vers le niveau G_{2h} .

- calcul de la forcing function P_{2h} pour le résidu sur la grille grossière :

$$P_{2h} = J_h^{2h} R(w_h) - R(I_h^{2h} w_h)$$

- réalisation d'itérations du schéma temporel avec phase implicite sur la grille grossière G_{2h} . La solution sur la grille grossière au pas de temps $n + 1$ est donnée par (dans le cas d'un schéma RK4) :

$$\begin{aligned} w_{2h}^{(0)} &= w_{2h}^n \\ w_{2h}^{(k)} &= w_{2h}^{(0)} - a_k \Delta t \operatorname{div} (R(w_{2h}^{k-1}) + P_{2h}) \quad \text{pour } k=1 \text{ à } 4 \\ w_{2h}^{n+1} &= w_{2h}^{(4)} \end{aligned}$$

On peut constater que lorsque le résidu devient nul sur la grille fine, le terme $R(w_{2h}^{k-1}) + P_{2h}$ s'annule et aucune correction ne se propage des grilles grossières vers les grilles fines.

- transfert des corrections C_h vers la grille fine G_h calculées par :

$$C_h = I_{2h}^h (w_{2h}^* - w_{2h})$$

où w_{2h}^* est la solution obtenue sur le maillage G_{2h} et I_{2h}^h est l'opérateur de prolongement du niveau de grille G_{2h} vers le niveau G_h .

Dans le cas d'une utilisation de plus de 2 niveaux de grille, les étapes décrites précédemment s'appliquent de manière récursive pour les niveaux G_{4h} , G_{8h} ... La technique de correction de solution sur un grille fine à l'aide de valeurs obtenues aux différents niveaux de grilles grossières est appelée cycle multigrille. Le cycle le plus simple est un cycle en V dont un schéma de principe est donné sur la figure 3.

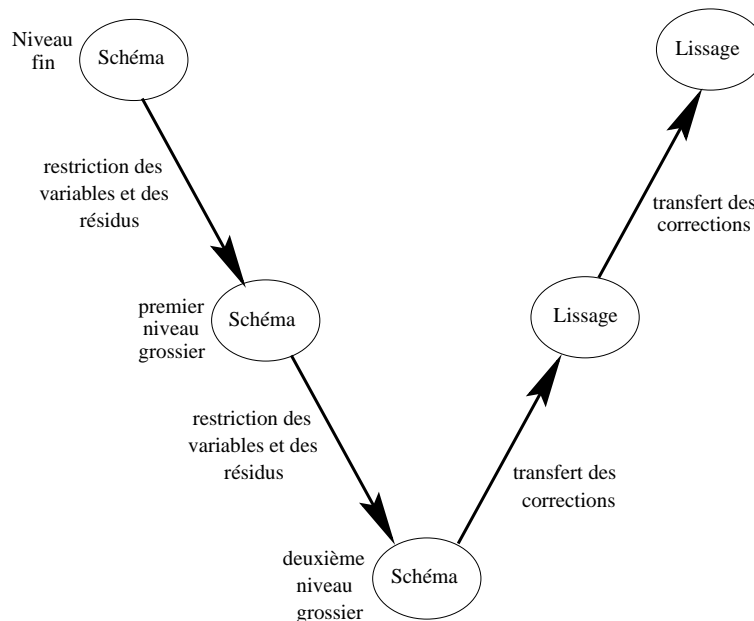


FIG. 3 – Cycle multigrille en V

4.4.3 Opérateurs intergrille

Opérateurs de restriction

Il y a deux types de champs à restreindre sur les grilles grossières :

- Les résidus :

Le résidu à transférer sur une cellule du niveau grossier est la somme des résidus calculés sur la grille fine aux cellules correspondantes.

- Les variables conservatives et les viscosités moléculaire et turbulente :

Les grandeurs sont transférées sur la grille grossière par une moyenne pondérée basée sur les volumes des cellules :

$$w_{2h} = \frac{\Sigma \Omega_h w_h}{\Sigma \Omega_h}$$

où Σ est l'opérateur sommation appliqué aux cellules de la grille fine correspondant à la cellule de la grille grossière et Ω_h est le volume des cellules correspondantes.

Opérateurs de prolongement

L'opérateur de prolongement I_{2h}^h transfère les corrections du maillage grossier vers le niveau fin et joue un rôle important dans l'amélioration de la convergence de la méthode. Il est composé des deux étapes suivantes :

- Les valeurs au centre des cellules de la grille grossière sont projetées sur les sommets des cellules par une moyenne arithmétique.
- A partir des valeurs projetées sur les noeuds de la grille grossière, les valeurs aux centres des cellules de la grille fine sont déterminées au moyen d'une interpolation trilineaire.

5 LES CONDITIONS AUX LIMITES

5.1 Les conditions aux limites à l'infini

5.1.1 Champ moyen

La méthode de traitement des conditions aux limites à l'infini repose sur l'utilisation des relations caractéristiques associées aux équations d'Euler. Elle est basée sur les propriétés des systèmes hyperboliques en temps (cf. polycopié de 2A).

Malgré le caractère non hyperbolique du système des équations de Navier-Stokes stationnaires, cette approche est appliquée sur les frontières situées dans des régions de l'écoulement où les effets visqueux sont en grande partie négligeables.

Les relations caractéristiques sont utilisées uniquement dans le cas où l'information se propage depuis l'intérieur du domaine de calcul vers l'extérieur de manière à compléter les conditions aux limites physiques. **Le nombre de caractéristiques entrantes fixe le nombre de valeurs indépendantes à imposer.**

Les différents types de conditions aux limites sont :

- entrée subsonique

Cette condition correspond au cas où l'écoulement entre dans le domaine de calcul avec une vitesse normale subsonique. Il y a alors quatre caractéristiques entrantes.

Par exemple, les quatre variables choisies à imposer peuvent être la pression d'arrêt, la température d'arrêt et la direction de la vitesse (deux angles, le dérapage et l'incidence). Pour compléter, une relation de compatibilité discrétisée (résolue par exemple au moyen d'une méthode de Newton) peut être utilisée.

Les quantités turbulentes déterminées par une équation de transport sont par définition associées à la caractéristique $\vec{V} \cdot \vec{n}$ et par conséquent doivent être imposées en tout point d'une frontière entrante subsonique.

- sortie subsonique - pression imposée

Il n'y a qu'une seule courbe caractéristique entrante donc une seule variable à imposer sur la frontière : usuellement on choisit la pression statique. Pour compléter, deux relations de compatibilité discrétisées peuvent être utilisées.

- entrée supersonique

Toutes les caractéristiques sont entrantes, il faut donc imposer complètement le vecteur w .

- sortie supersonique

Il n'y a qu'une aucune caractéristique entrante. On utilise une extrapolation des variables au bord du domaine.

- condition de non réflexion

Cette condition est usuellement utilisée pour les écoulements externes autour d'un profil, sur la frontière extérieure du domaine de calcul, pour simuler une atmosphère infinie. Elle permet d'éliminer les perturbations qui pourraient apparaître lors, par exemple, de la traversée d'une discontinuité au travers de la frontière [24].

La condition consiste à imposer les grandeurs conservatives à la frontière en utilisant toutes les relations caractéristiques. Le nombre de caractéristiques entrantes ou sortantes n'est pas déterminé à l'avance mais calculé en chaque point de la frontière. On évalue les valeurs propres du système sur la face frontière au pas de temps n . Le signe de chacune des valeurs propres permet de déterminer le sens de propagation de l'information. Les grandeurs conservatives qui sont imposées à la frontière sont prises soit à un état de référence si la caractéristique est entrante soit à l'état courant si la caractéristique est sortante.

5.1.2 Champ turbulent

Pour le champ turbulent, les grandeurs transportées doivent être imposées à l'infini. Elles peuvent être calculées en fonction du taux de turbulence T_u et de la viscosité turbulente à l'infini $\mu_{t\infty}$, selon les formulations suivantes :

$$\begin{aligned}(\rho k)_\infty &= \frac{3}{2} T_u^2 \rho_\infty U_\infty^2 \\(\rho \varepsilon)_\infty &= C_\mu \frac{(\rho k)_\infty^2}{\mu_{t\infty}} \\(\rho \omega)_\infty &= \frac{(\rho k)_\infty}{\mu_{t\infty}} \\(\rho \nu)_\infty &= \mu_{t\infty}\end{aligned}$$

Généralement, la valeur de $\mu_{t\infty}$ est prise égale à une certaine fraction de μ_∞ . Si le taux de turbulence est inconnu, les valeurs à l'infini sont fixées arbitrairement. Par exemple :

$$\begin{aligned}(\rho k)_\infty &= 10^{-8} \rho_i a_i^2 \\(\rho \varepsilon)_\infty &= 10^{-6} \frac{\rho_i a_i^3}{L} \\(\rho \omega)_\infty &= 10 \frac{\rho_i a_i}{L} \\(\rho \nu)_\infty &= 10^{-6} \rho_i a_i L\end{aligned}$$

Attention, pour le modèle $k-\omega$ de Wilcox, les résultats de calculs sont sensibles à la valeur $(\rho \omega)_\infty$ qui est fixée à l'infini. Il convient donc d'essayer plusieurs valeurs !

5.2 Les conditions aux limites de paroi

5.2.1 Champ moyen

Les conditions aux limites sur une paroi traduisent l'adhérence du fluide à la paroi et la caractéristique thermique de cette paroi. Cette dernière condition est de deux types :

- adiabatique avec un flux de chaleur à la paroi nul.
- isotherme avec une température imposée en tout point de la paroi.

Pour fixer à la paroi les variables énergie totale et masse volumique, il est souvent utilisée une hypothèse sur la pression statique à savoir qu'elle varie très peu dans la direction normale à la paroi : $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$.

Ceci peut aussi être utilisée avec une condition au limite de type lois de paroi (conditions sur les flux visqueux).

5.2.2 Champ turbulent

A la paroi, on impose la valeur des quantités turbulentes :

- pour l'énergie cinétique de turbulence : $\rho k = 0$
- pour le taux de dissipation modifiée : $\rho \tilde{\varepsilon} = 0$
- pour la dissipation spécifique : $\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$

Selon la façon de coder "l'infini" à la paroi, on obtient des résultats différents !

- pour le modèle de Spalart-Allmaras : $\rho \tilde{\nu} = 0$

5.3 Les conditions initiales

Pour un calcul stationnaire, les conditions initiales n'ont pas influence sur la solution. Le champ moyen est généralement initialisé avec un état uniforme correspondant au champ infini amont.

L'initialisation d'un calcul avec modèle de turbulence à équations de transport peut s'avérer délicate ! Un calcul conduit parfois à une convergence vers une solution laminaire ou une divergence. La raison essentielle de ce comportement provient du fait que les équations de transport ont souvent comme solution triviale un champ turbulent nul (sauf pour $k-\omega$).

Une solution envisageable consiste à effectuer quelques itérations en laminaire avant d'initialiser le champ des grandeurs turbulentes. Certains modèles ne nécessitent aucun traitement particulier et les variables turbulentes sont initialisées aux valeurs à l'infini. La viscosité turbulente est prise égale à un certain rapport de la viscosité moléculaire. Il est possible de fixer l'énergie cinétique de turbulence k en utilisant l'hypothèse de Bradshaw : $k = \mu_t |rot\vec{V}| / 0.3$.

Pour d'autres modèles, le champ turbulent doit être développé afin que le calcul ne reste pas laminaire. L'initialisation est alors effectuée à partir d'une solution convergée obtenue avec un autre modèle.

6 MAILLAGE STRUCTURE/NON STRUCTURE

Les maillages non structurés se distinguent des autres formes de maillages par l'absence de connectivité implicite qui permet de relier les points de discrétisation les uns aux autres. A l'inverse, un maillage structuré est construit sur la base de deux ou trois directions d'indices : chaque noeud du maillage possède une numérotation multi-indice (i, j, k) qui permet de connaître instantanément la position de ce noeud ainsi que des différents noeuds qui lui sont reliés. Les maillages non structurés font donc appel à une structure de données supplémentaires appelé matrice de connectivité, et qui décrit l'ensemble des liaisons existant dans le maillage.

Cette matrice de connectivité peut être fondée sur la description des cellules du maillage (c'est-à-dire pour chaque cellule la liste des indices des noeuds qu'elle contient), des faces du maillage (avec la liste orientée des noeuds qui forment la face et des cellules adjacentes), ou des arêtes du maillage (avec pour chaque arête les indices des deux noeuds correspondants). En règle générale, la structure adoptée par les outils de génération de maillages est fondée sur la description des cellules du maillage.

Les outils de génération de maillages non structurés permettent actuellement de discrétiser des géométries complexes de façon automatique alors que les générateurs de maillages structurés sont soit incapables de les discrétiser, soit capables mais en impliquant un coût élevé en temps et un savoir-faire pointu. L'utilisation de maillages non structurés correspond donc à un besoin crucial en conception dans l'industrie.

7 LA TRANSITION LAMINAIRE/TURBULENT

Si aucun critère de transition ou fonction d'intermittence ne sont implantés dans le code, les zones laminaires sont imposées selon la configuration étudiée.

Une façon de procéder dans les zones laminaires est la suivante : les équations de transport sont intégrées avec $\mu_t/\mu = 10^{-3}$ et les grandeurs turbulentes sont fixées aux valeurs à l'infini. Le passage au régime turbulent s'effectue alors de façon brutale pour la viscosité turbulente.

Références

- [1] A N Kolmogorov. Local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 30 :299–303, 1941.
- [2] A. Favre. Equations statistiques des gaz turbulents. In *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 246*, 1956.
- [3] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles. *Journal de mécanique*, 4(3) :361–390, 1965.
- [4] M.V. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. Colloque International CNRS No 108, Mécanique de la Turbulence, Editions CNRS, 1961.
- [5] R. Michel, C. Quemard, and R. Durand. Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre. Note Technique 154, ONERA, 1969.
- [6] B. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA 78-2587, 16th Aerospace Sciences Meeting – Huntsville, Alabama*, 1978.
- [7] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *AIAA 92-0439, 30th Aerospace Sciences Meeting – Reno, Nevada*, January 6-9 1992.
- [8] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aéronautique*, (1) :5–21, 1994.
- [9] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :301–314, 1972.
- [10] P.A. Durbin. On the $k - \epsilon$ stagnation point anomaly. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(1) :89–90, 1996.
- [11] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11) :1299–1310, November 1988.
- [12] F.R. Menter. Improved two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. Technical report, NASA Technical Memorandum 103975, October 1992.
- [13] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.
- [14] J.E. Bardina, P.G. Huang, and T.J. Coakley. Turbulence modeling validation, testing and development. Technical report, NASA, April 1997. TM 110446.
- [15] J. Cousteix. Turbulence et couche limite. Collection La Chevêche, CEPADUES-EDITIONS, 1989.
- [16] E.R. van Driest. Turbulent boundary layer in compressible fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 18 :145–160, 1951.
- [17] E.R. van Driest. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23 :1007–1011, 1957.
- [18] A. Lerat, J. Sidès, and V. Darut. An implicit finite-volume method for solving the Euler equations. *Lecture notes in Physics, Springer-Verlag*, pages 343–349, 1982.
- [19] A. Jameson. Time dependent calculations using multigrid with applications to unsteady flows past airfoils and wings. In *AIAA paper 91-1259, 10th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu (HI)*, 1991.

- [20] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [21] A. Harten and J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50 :235–269, 1983.
- [22] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. In *AIAA Paper 81-1259*, June 1981.
- [23] A. Jameson. Multigrid algorithms for compressible flow calculations. Lecture Notes in Mathematics n° 1228, Springer-Verlag, 1985.
- [24] J.L. Thomas and M.D. Salas. Far-field boundary conditions for transonic lifting solutions to the Euler equations. *AIAA Journal*, 24(7) :1074–1080, july 1986.
- [25] J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans des lits rectilignes à grande section. Gauthier-Villars, 1897.
- [26] H.C. Chen and V.C. Patel. Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA Journal*, 26(6) :641–648, june 1985.
- [27] K. Y. Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal*, 20(1) :33–38, 1982.
- [28] L.E. Eriksson. Boundary conditions for artificial dissipation operators. Technical report, FFA, 1984. FFA TN 1984-53.
- [29] H. Ha Minh and A. Kourta. Semi-deterministic turbulence modelling for flows dominated by strong organized structures. In *Proc. Symp. Turbulent Shear Flows, Kyoto*, 1993.
- [30] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows - fundamentals of numerical discretization, volume I. John Wiley & Sons, 1988.
- [31] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows, volume II. John Wiley & Sons, 1990.
- [32] A. Jameson and T. Baker. Solution of the Euler equations for complex configurations. In *AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference*, July 1983.
- [33] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 3 :269–289, 1974.
- [34] F.R. Menter. Zonal two equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. In *AIAA 93-2906, 24th Fluid Dynamics Conference - Orlando, Florida*, July 6–9 1993.
- [35] J.G. Moore and J. Moore. Realizability in two equation turbulence models. In *AIAA 99-3779. 30th Fluid Dynamics Conference, Norfolk, Virginia*, 28 June - 1 July 1999.
- [36] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows : A review. *AIAA Journal*, 23(9) :1308–1319, 1985.
- [37] H. Tennekes and J.L. Lumley. A first course in turbulence. Massachusetts Institute of Technology, 1972.
- [38] F.M. White and G.H. Christoph. A simple theory for the two-dimensional compressible turbulent boundary layer. *Journal of Basic Engineering*, pages 636–642, September 1972.
- [39] V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski, and C.G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physic of Fluids*, 4(7) :1510–1520, 1992.

8 ANNEXES

8.1 Matrices jacobiennes des flux convectifs

Les équations d'Euler sont écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{B} \frac{\partial w}{\partial y} + \hat{C} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial w} \quad , \quad \hat{B} = \frac{\partial G}{\partial w} \quad , \quad \hat{C} = \frac{\partial H}{\partial w}$$

avec w le vecteur des variables conservatives, F , G et H les flux convectifs respectivement dans les directions x , y et z . On note le vecteur vitesse \vec{V} dont les composantes sont U , V et W .

Les trois matrices jacobiennes \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} sont donnée par :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -U^2 + \frac{\gamma-1}{2} \|\vec{V}\|^2 & (3-\gamma)U & -(\gamma-1)V & -(\gamma-1)W & \gamma-1 \\ -UV & V & U & 0 & 0 \\ -UW & W & 0 & U & 0 \\ -U [\gamma E - (\gamma-1) \|\vec{V}\|^2] & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (\|\vec{V}\|^2 + 2U^2) & -(\gamma-1)UV & -(\gamma-1)UW & \gamma U \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -UV & V & U & 0 & 0 \\ -V^2 + \frac{\gamma-1}{2} \|\vec{V}\|^2 & -(\gamma-1)U & (3-\gamma)V & -(\gamma-1)W & \gamma-1 \\ -VW & 0 & W & V & 0 \\ -V [\gamma E - (\gamma-1) \|\vec{V}\|^2] & -(\gamma-1)UV & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (\|\vec{V}\|^2 + 2V^2) & -(\gamma-1)VW & \gamma V \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -UW & W & 0 & U & 0 \\ -VW & 0 & W & V & 0 \\ -W^2 + \frac{\gamma-1}{2} \|\vec{V}\|^2 & -(\gamma-1)U & -(\gamma-1)V & (3-\gamma)W & \gamma-1 \\ -W [\gamma E - (\gamma-1) \|\vec{V}\|^2] & -(\gamma-1)UW & -(\gamma-1)VW & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} (\|\vec{V}\|^2 + 2W^2) & \gamma W \end{pmatrix}$$

En géométrie curviligne, la matrice jacobienne A des flux convectifs à travers une face est calculée par :

$$A = \hat{A}S_x + \hat{B}S_y + \hat{C}S_z$$

avec \vec{S} le vecteur surface de composantes (S_x, S_y, S_z) .

Cette matrice est diagonalisable à valeurs propres réelles. La matrice diagonale $\Lambda = P^{-1}AP$ s'écrit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \vec{V} \cdot \vec{S} & & & & \\ & \vec{V} \cdot \vec{S} & & & \\ & & \vec{V} \cdot \vec{S} & & \\ & & & \vec{V} \cdot \vec{S} + c\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} & \\ & & & & \vec{V} \cdot \vec{S} - c\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \end{pmatrix}$$

Notons \vec{n} le vecteur normal à la face, de composantes (n_x, n_y, n_z) , b la quantité $\frac{\|\vec{V}\|^2}{2}$ et B la quantité $\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$. L'enthalpie totale s'écrit : $H = \frac{c^2}{\gamma-1} + b$. Les matrices de passage sont :

$$P = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c} \\ Un_x & un_y - \rho n_z & un_z + \rho n_y & \frac{\rho}{2c}(U + cn_x) & \frac{\rho}{2c}(U - cn_x) \\ Un_x + \rho n_z & Vn_y & Vn_z - \rho n_x & \frac{\rho}{2c}(V + cn_y) & \frac{\rho}{2c}(V - cn_y) \\ Wn_x - \rho n_y & Wn_y + \rho n_x & Wn_z & \frac{\rho}{2c}(W + cn_z) & \frac{\rho}{2c}(W - cn_z) \\ bn_x + \rho(\vec{V} \wedge \vec{n})_x & bn_y + \rho(\vec{V} \wedge \vec{n})_y & bn_z + \rho(\vec{V} \wedge \vec{n})_z & \frac{\rho}{2c}(H + c\vec{V} \cdot \vec{n}) & \frac{\rho}{2c}(H - c\vec{V} \cdot \vec{n}) \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} Bn_x & (\gamma-1)\frac{U}{c^2}n_x & (\gamma-1)\frac{V}{c^2}n_x + \frac{n_z}{\rho} & (\gamma-1)\frac{W}{c^2}n_x - \frac{n_y}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_x \\ Bn_y & (\gamma-1)\frac{U}{c^2}n_y - \frac{n_z}{\rho} & (\gamma-1)\frac{V}{c^2}n_y & (\gamma-1)\frac{W}{c^2}n_y + \frac{n_x}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_y \\ Bn_z & (\gamma-1)\frac{U}{c^2}n_z + \frac{n_y}{\rho} & (\gamma-1)\frac{V}{c^2}n_z - \frac{n_x}{\rho} & (\gamma-1)\frac{W}{c^2}n_z & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_z \\ \frac{c}{\rho} \left(\frac{\gamma-1}{2}M^2 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{c} \right) & \frac{n_x}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}U & \frac{n_y}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}V & \frac{n_z}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}W & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ \frac{c}{\rho} \left(\frac{\gamma-1}{2}M^2 + \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{c} \right) & -\frac{n_x}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}U & -\frac{n_y}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}V & -\frac{n_z}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}W & \frac{\gamma-1}{\rho c} \end{pmatrix}$$

Pour un écoulement 2D, la matrice P est obtenue à partir de l'expression précédente en enlevant la deuxième colonne et la quatrième ligne, avec $W = n_z = 0$. Et la matrice P^{-1} est obtenue en enlevant la quatrième colonne et la deuxième ligne, avec $W = n_z = 0$.

8.2 Matrices jacobiennes des flux visqueux

On appelle F_v , G_v et H_v les flux visqueux respectivement dans les directions x , y et z . On introduit 9 matrices jacobiennes des flux visqueux par rapport aux variables conservatives et à leurs gradients :

$$\begin{aligned} A_0^v &= \frac{\partial F_v}{\partial w} & ; & & A_1^v &= \frac{\partial F_v}{\partial w_x} & ; & & A_2^v &= \frac{\partial F_v}{\partial w_y} \\ B_0^v &= \frac{\partial G_v}{\partial w} & ; & & B_1^v &= \frac{\partial G_v}{\partial w_x} & ; & & B_2^v &= \frac{\partial G_v}{\partial w_y} \\ C_0^v &= \frac{\partial H_v}{\partial w} & ; & & C_1^v &= \frac{\partial H_v}{\partial w_x} & ; & & C_2^v &= \frac{\partial H_v}{\partial w_y} \end{aligned}$$

$$\text{Rayon spectral : } \rho(A_1^v) = \rho(B_2^v) = \rho_V = \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right).$$

8.3 Cas des équations de transport de la turbulence

On considère le système d'équations du modèle $k - \varepsilon$ pour un écoulement 2D :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (F_c(w) - F_v(w, w_x, w_y))}{\partial x} + \frac{\partial (G_c(w) - G_v(w, w_x, w_y))}{\partial y} = S(w)$$

Avec :

w le vecteur des variables conservatives $(\rho k, \rho \varepsilon)^t$,

F_c et G_c les flux convectifs respectivement dans les directions x et y ,

F_d et G_d les flux dissipatifs respectivement dans les directions x et y ,

S le terme source.

$$F_c = \begin{pmatrix} \rho k U \\ \rho \varepsilon U \end{pmatrix} \quad ; \quad F_d = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) k_x \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\Psi}) \varepsilon_x \end{pmatrix}$$

$$G_c = \begin{pmatrix} \rho k V \\ \rho \varepsilon V \end{pmatrix} \quad ; \quad G_d = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) k_y \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\Psi}) \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

On introduit les matrices jacobiennes A et B des flux convectifs par rapport aux variables conservatives :

$$A = \frac{\partial F_c}{\partial w} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{\partial G_c}{\partial w} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

Et on introduit les matrices jacobiennes A_1^v , A_2^v , B_1^v et B_3^v des flux diffusifs par rapport aux gradients des variables :

$$A_1^v = \frac{\partial F_v}{\partial w_x} = B_2^v = \frac{\partial G_v}{\partial w_y} = \frac{1}{\rho Re} \begin{pmatrix} \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} & 0 \\ 0 & \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } A_2^v = \frac{\partial F_v}{\partial w_y} = B_1^v = \frac{\partial G_v}{\partial w_x} = 0.$$

Toutes ces matrices sont diagonales.

8.4 Système des équations NS moyennées "à la Favre"

On parle aussi des équations FANS (Favre Averaged Navier-Stokes). On introduit les décompositions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \bar{\rho} + \rho' \\ u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \\ P = \bar{P} + P' \\ h = \tilde{h} + h'' \\ e = \tilde{e} + e'' \\ T = \tilde{T} + T'' \\ q_j = \bar{q}_j + q_j' \end{array} \right.$$

où h désigne l'enthalpie et e l'énergie interne.

Les équations de Navier-Stokes "à la Favre" :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{\tau}_{ji} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{q}_j - \overline{\rho u_j'' h''} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i \left(\tilde{\tau}_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right) \right] \end{aligned}$$

Avec l'équation d'état : $\bar{P} = r \bar{\rho} \tilde{T}$

Le tenseur $\tilde{\tau}_{ij}$ représente la partie moyenne du tenseur des contraintes visqueuses. Et le terme $-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \bar{\rho} \tau_{ij}^t$ est le tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds).

Le terme $\overline{\rho u_j'' h''} = q_j^t$ est le flux de chaleur turbulent ; il représente l'enthalpie transportée par les fluctuations turbulentes.

Le terme $\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$ est l'énergie cinétique de turbulence $\bar{\rho} k$.

La partie moyenne du tenseur taux de déformation s'écrit : $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$. L'hypothèse de Boussinesq permet d'exprimer le tenseur turbulent selon :

$$\bar{\rho} \tau_{ij}^t = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = 2\mu_t \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}$$

Et la loi de Fourier "turbulente" permet d'exprimer le vecteur flux de chaleur turbulent selon :

$$q_j^t = \overline{\rho u_j'' h''} = -\frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}$$

8.5 Paramètres de calculs

Lorsque des simulations numériques avec un solveur RANS sont effectuées, il est important de présenter les conditions de calcul (nombres de Mach et de Reynolds, température, pression, incidence, caractéristique de la géométrie, transition laminaire/turbulent...) et de détailler le plus possible les paramètres de calculs :

- caractéristique du maillage avec y^+ de première maille.
- nombre de CFL, pas de temps en instationnaire.
- nombre de niveaux de grilles en multigrille.
- nombre de sous-itérations en pas de temps dual et critère de convergence dans les sous-itérations.
- paramètre du schéma numérique (paramètres de la dissipation artificielle artificielle, constante de algorithme MUSCL, paramètre de la correction de Harten...).
- les paramètres de la phase implicite (coefficients β pour l'IRS, nombre d'itérations des algorithmes itératifs...).
- le modèle de turbulence utilisé.
- les paramètres du schéma numérique pour intégrer les équations de transport de la turbulence.
- condition de type lois de paroi.
- utilisation de limiteurs sur les variables turbulentes ou sur la viscosité turbulence.
- les critères de convergence.