XXII Olimpiada del Cono Sur, 2011

Primer Examen Selectivo, Perú

1. Halle todos los enteros positivos n para los cuales se cumple que:

$$\text{m.c.d.}(n,1) + \text{m.c.d.}(n,2) + \cdots + \text{m.c.d.}(n,n) = 3n - 3.$$

Aclaración: El número m.c.d.(a, b) denota al máximo común divisor de a y b.

Sergio Vera

2. En un torneo participaron n equipos de fútbol. Cada uno de los n equipos jugó exactamente un partido contra cada uno de los otros equipos. Algunos partidos terminaron en empate. Sucedió que cada equipo ganó exactamente tres partidos y además, no hay tres equipos A, B, C tales que A ganó a B, B ganó a C y C ganó a A. Determine todos los posibles valores de n.

Jorge Tipe

3. Considere 15 puntos en el plano, cada uno de ellos es pintado de rojo, azul o verde, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de todas las distancias entre los puntos rojos y los azules es 51.
- La suma de todas las distancias entre los puntos rojos y los verdes es 39.
- La suma de todas las distancias entre los puntos azules y los verdes es 1.

Determine cuántos puntos hay de cada color (analice todas las posibilidades).

I. Voronovich, S. Mazanik (Belarús)

Segundo Examen Selectivo, Perú

1. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC de un triángulo ABC y G su baricentro. Si las circunferencias circunscritas a los triángulos AMN y BGC son tangentes exteriores, ¿es posible que el triángulo ABC sea escaleno?

Jorge Tipe

2. Sea $n \geq 3$ un número entero. En cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$ se escribe un 0 o un 1 de tal manera que la suma de los números de cada subtablero 2×2 y de cada subtablero 3×3 es un número par, ¿de cuántas formas se puede hacer eso?

Jonathan Farfán

3. Determine todos los enteros positivos a para los cuales existen los enteros no negativos m, n, k tales que al escribir la representación decimal de a^n a la izquierda de la representación decimal de a^m (sin dejar espacio) obtenemos la representación decimal de a^k.

Ejemplo: Si escribimos la representación decimal de 6^2 a la izquierda de la representación decimal de 6^3 obtenemos 36216.

V. Senderov (Rusia)

Tercer Examen Selectivo, Perú

1. Un entero positivo es llamado *digital* si dicho número es igual al producto de los dígitos de algún entero positivo. Por ejemplo, 28 es digital porque es igual al producto de los dígitos del número 147.

Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números digitales diferentes, demuestre que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} < \frac{35}{8}.$$

Jorge Tipe

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O tal que BC y AD no son paralelos. Sea P el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero. Los rayos AB y DC se intersectan en E. Una circunferencia de centro I inscrita en el triángulo EBC es tangente al lado BC en T_1. La circunferencia ex-inscrita al triángulo EAD, relativa a AD, es tangente a AD en T_2 y tiene centro J. Las rectas IT_1 y JT_2 se intersectan en Q. Pruebe que O, P, Q son colineales.

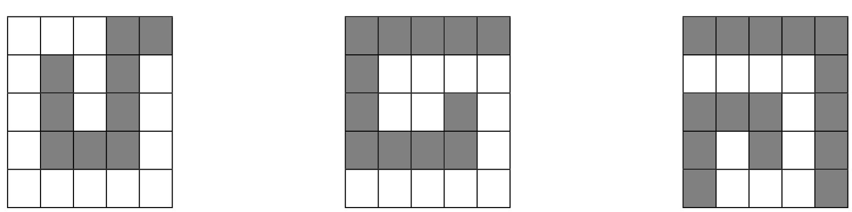
(Ucrania)

3. Sea $n \geq 3$ un entero impar. Cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$ ha sido coloreada de blanco o gris. Decimos que una secuencia de cuadrados $C_1, C_2, \ldots, C_m$ es un *camino* si se cumplen las siguientes condiciones:

- Los cuadrados $C_1, C_2, \ldots, C_m$ tienen el mismo color.
- Los cuadrados C_i y C_{i+1} comparten un lado para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- No hay otros dos cuadrados en la secuencia que comparten un lado.

Suponga que los cuadrados blancos forman un camino, y que los cuadrados grises también forman un camino, demuestre que uno de esos caminos empieza o termina en el centro del tablero.

Por ejemplo, en el tablero de la izquierda el coloreo es válido, pero en los otros dos no. En el tablero del centro los cuadrados blancos no forman un camino porque no cumplen la tercera condición, y en el de la derecha los cuadrados negros tampoco forman un camino porque no cumplen la segunda condición.



(Canadá)

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

http://selectivos-peru.blogspot.com