

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Primera Fase – Nivel 2

21 de agosto de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Simplifica la siguiente expresión:

$$E = \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right) - x + 2; \quad x \neq -3$$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

2. El director de un colegio salió de vacaciones a la ciudad de Arequipa. Durante sus días de vacaciones se cumplió lo siguiente:

- Llovió siete veces en la mañana o en la tarde.
- Cuando llovió en la tarde estuvo clara la mañana.
- Hubo cinco tardes claras y seis mañanas claras.

¿Cuántos días estuvo de vacaciones el director?

- A) 8 B) 9 C) 15 D) 10 E) 30

3. La siguiente tabla muestra los valores hallados para la función $f(x) = x^m - p$, donde m es un entero positivo.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	-4	-1	4	a

Halla el valor de $a - m$.

- A) 5 B) 7 C) 2 D) 9 E) 11

4. Sea la función $f(x) = 2x^2 + 2x - 10$ cuyo dominio es el conjunto $\{2; 4; 6\}$. Determina el rango de f .

- A) $\{2; 16; 24\}$ C) $\{2; 30; 74\}$
 B) $\{5; 25; 75\}$ D) $\{8; 16; 32\}$
 E) $\{3; 12; 25\}$

5. La suma de dos números es 41. Si se disminuye en 6 unidades el primero y se aumenta en 5 unidades el segundo, el producto de tales números aumenta en 10 unidades, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los números iniciales?

- A) 9 B) 12 C) 8 D) 6 E) 11

6. En el conjunto \mathbf{R} de los números reales, E es el complemento del intervalo $<2; 9]$, halla $E \cup <6; 9]$.

A) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle 6; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; 2] \cup \langle 6; +\infty \rangle$ C) $\langle -\infty, 9]$

D) $\langle 6; +\infty \rangle$ E) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup [6; +\infty \rangle$

7. Halla el valor numérico de R:

$$R = \frac{\sqrt{23}(xy+10)}{x+y} + \frac{y+2\sqrt{29}}{x}$$

Cuando $x = \sqrt{23} + \sqrt{29}$ e $y = \sqrt{23} - \sqrt{29}$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

8. Carlos tiene 52 años. Esta edad es el doble de la edad que tenía Héctor cuando Carlos tenía la edad que tiene Héctor. ¿Qué edad tiene Héctor?

A) 49 años B) 37 años C) 38 años D) 29 años E) 39 años

9. Si $x^2 = y^2 + z^2$, simplifica la siguiente expresión:

$$\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)}$$

A) $\frac{x(y+z)}{4}$ B) $\frac{x^2}{2}$ C) $y+z$ D) $\frac{x\sqrt{yz}}{2}$ E) $\frac{yz}{2}$

10. Se tienen 48 naranjas divididas en tres grupos. Del primer grupo se pasan al segundo tantas naranjas como hay en este. Luego, del segundo grupo se pasan al tercero tantas naranjas como hay en este último. Finalmente, del tercer grupo se pasan al primero tantas naranjas como hay ahora en el primero. Si cada grupo resulta con igual cantidad de naranjas, ¿cuántas naranjas tenía inicialmente el primer grupo?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 22 E) 28

11. El polinomio $x^2 - mx - 2$ es divisible por $x - 1$ y el polinomio $x^2 - nx + 2$ es divisible por $x + 1$. Entonces el valor de $m - n$ es:

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

12. Si m, n, p y k ($k > 1$) son cuatro números tales que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{21+m}{21-m} = \frac{100+n}{100-n} = k ; \quad m+n+1 = k^2$$

Calcula $k^3 + 1$.

A) 1 008 B) 1 001 C) 8 001 D) 513 E) 730

13. Observa que $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$, porque $7 + 2 = 9$ y $7 \times 2 = 14$. Usa este tipo de simplificación para hallar el valor de:

$$\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}$$

- A) $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ B) 1 C) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ E) $\sqrt{11}$

14. Un camión que transporta cierta cantidad de bolsas de cemento de igual peso tarda 16 horas en hacer su recorrido. Si transportara igual número de bolsas pero teniendo cada bolsa 2 kilogramos más, se demoraría 17 horas. Si cada bolsa tuviera 8 kilogramos menos que las iniciales y la cantidad de bolsas se aumenta en 5, el camión tardaría 15 horas en hacer su recorrido. Calcula el número inicial de bolsas transportadas, considerando que el tiempo de recorrido es proporcional a la carga.

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 28 E) 30

15. Se llaman números *crecientes* a aquellos números naturales que tienen sus dígitos ordenados en forma creciente de izquierda a derecha. Por ejemplo, 1 478 es un número creciente pero 2 669, 7 541 y 2 548 no son crecientes. ¿Cuántos números crecientes existen entre 2 300 y 2 600?

- A) 25 B) 27 C) 31 D) 42 E) 46

16. Simplifica $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}+\sqrt[3]{26}}$.

- A) 3 B) $2\sqrt[3]{26}$ C) $\sqrt[3]{26}$ D) 1 E) $\sqrt[3]{26}+1$

17. Considera el conjunto $A = \{1; 2; 3; \dots; 2003\}$. ¿Cuántos subconjuntos tiene A tales que la suma de sus elementos sea 2 007 000?

Nota: Recuerda que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- A) Ninguno B) 3 C) 4 D) 1 002 E) 2 003

18. Sean x, y números que satisfacen:

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}; \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

¿Cuál es el valor de $x+y$?

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 2 E) No se puede determinar

19. Un cuadrado *antimágico* es un tablero de 4×4 en el que se ubican los números del 1 al 16 de tal modo que al sumar los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal principal se obtienen 10 números consecutivos. El diagrama muestra un cuadrado *antimágico* incompleto. Halla el valor de $x + 2y$.

		y	14
x	9	3	7
	12	13	5
10	11	6	4

A) 48 B) 47 C) 46 D) 45 E) 50

20. Un entero positivo n se dice que es *curioso* si al leerlo de izquierda a derecha se cumple que cada par de sus dígitos ubicados en forma consecutiva es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, el número 3649 es *curioso* puesto que 36, 64 y 49 son cuadrados perfectos. ¿Cuántos enteros n mayores que 100 (incluyendo al número del ejemplo) son *curiosos*?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN