

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Primera Fase – Nivel 3

21 de agosto de 2004

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

1. El diámetro mayor de la llanta delantera de un camión mide 100 cm. ¿Cuántas vueltas completará dicha llanta en un recorrido de 6,28 kilómetros? (Considere  $\pi = 3,14$ )

A) 1 000      B) 2 000      C) 500      D) 20      E) 100

2. En el triángulo rectángulo ABC recto en B la longitud de la hipotenusa es el triple de la longitud que uno de los catetos. Determina:

$$\frac{\text{sen } A \cdot \text{sen } C}{2}$$

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{9\sqrt{8}}{8}$       C)  $\sqrt{10}$       D)  $\frac{3}{20}$       E)  $\frac{\sqrt{2}}{9}$

3. Determina el valor numérico de la siguiente expresión:

$$A = \frac{\text{ctg}^2 60^\circ + \frac{1}{2} \text{sec}^2 45^\circ - \frac{3}{2} \text{csc}^2 60^\circ}{\text{sen}^2 30^\circ + \frac{3}{5} \text{ctg}^2 45^\circ}$$

A)  $\frac{40}{25}$       B)  $-\frac{40}{51}$       C)  $\frac{3}{5}$       D)  $\frac{21}{25}$       E)  $\frac{25}{6}$

4. Simplifica la siguiente expresión:

$$E = \left( \frac{1}{4} \cos^2 x \right) \left( \frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x} - \frac{1 - \text{sen } x}{1 + \text{sen } x} \right); \quad 0 < x < 90^\circ$$

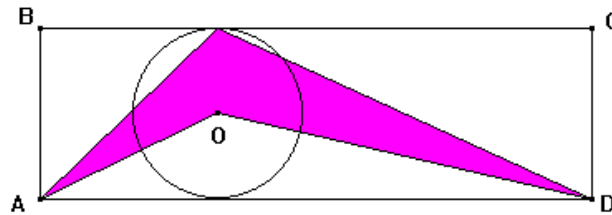
A)  $\cos x$       B)  $\text{sen } x$       C)  $4 \text{sec}^2 x$       D)  $4 \cos^2 x$       E)  $\text{sen } 2x$

5. Si S y C son los números de grados que representan a un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal, respectivamente. Calcula:

$$M = \sqrt[3]{\frac{S+C}{C-S} - 11} + \sqrt{\frac{S+C}{C-S} + 45}$$

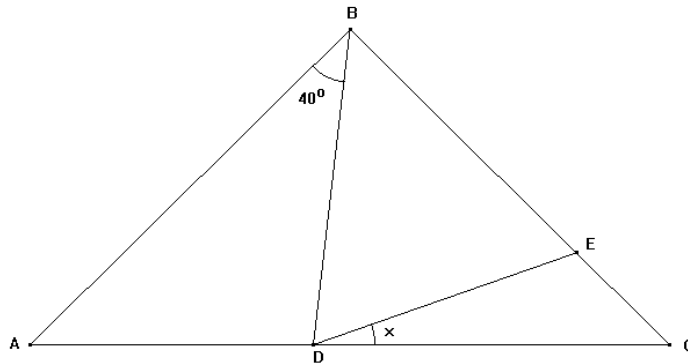
A) 10      B) 12      C) 14      D) 16      E) 18

6. En la figura, se tiene una circunferencia de centro O que es tangente a dos de los lados del rectángulo ABCD. Si ABCD tiene un área de  $12 \text{ cm}^2$ , halla el área de la región sombreada.



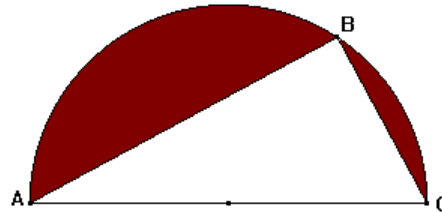
- A)  $3 \text{ cm}^2$     B)  $4 \text{ cm}^2$     C)  $5 \text{ cm}^2$     D)  $2 \text{ cm}^2$     E)  $6 \text{ cm}^2$

7. En la figura,  $AB = BC$  y  $BD = BE$ . Calcula la medida del ángulo  $x$ .



- A)  $20^\circ$     B)  $30^\circ$     C)  $50^\circ$     D)  $40^\circ$     E)  $10^\circ$

8. En la figura mostrada, AC es el diámetro de la semicircunferencia de radio  $r$ . Si  $\angle BCA = \theta$ , determine el área de la región sombreada.

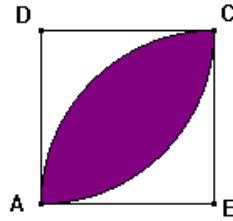


- A)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \cos \theta \right)$     B)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \text{sen} \theta \right)$     C)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \cos 2\theta \right)$   
 D)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \text{sen} 2\theta \right)$     E)  $r^2 \left( \frac{\pi}{2} + 2\text{sen} \theta \right)$

9. En las orillas opuestas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es 30 m y la de la otra es 20 m. La distancia entre sus troncos es 50 m. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Repentinamente los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, justamente sobre la línea imaginaria que une las bases de los troncos de las palmeras. Los pájaros se lanzan a la vez y llegan al pez al mismo tiempo. Considerando que los pájaros volaron en línea recta y a la misma velocidad constante, ¿a qué distancia de la base del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

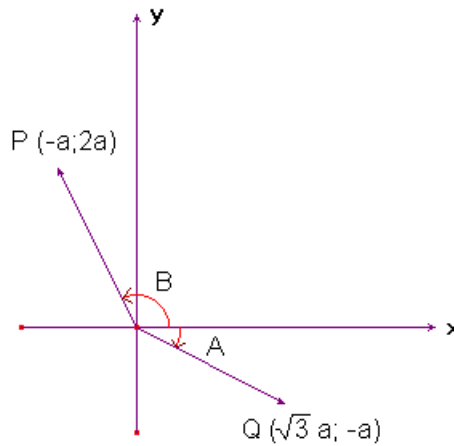
- A) 10 m    B) 20 m    C) 25 m    D) 30 m    E) 40 m

10. En la figura se observa un cuadrado ABCD de lado 4 y dos cuartos de circunferencia. Calcula el área de la región sombreada.



- A)  $8\pi - 16$       B)  $16 - 4\pi$       C)  $16\pi - 16$       D)  $16 - 2\pi$       E)  $16 + 4\pi$

11. Utiliza la figura mostrada para calcular  $E = \frac{\text{sen } B - 3 \cos B}{\text{sen } A - \sqrt{3} \cos A}$ .

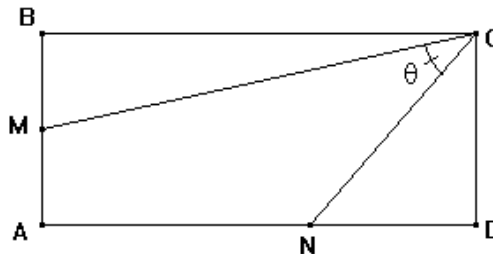


- A)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       B)  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$       C)  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$       D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       E)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. Una persona que se encuentra en un punto P a 300 metros de altura sobre el nivel del mar observa que un barco se aleja de dicho punto con un ángulo de depresión de  $60^\circ$ ; dos minutos después la misma persona observa al barco con un ángulo de depresión de  $30^\circ$ . Si la velocidad del barco es constante, calcula su valor.

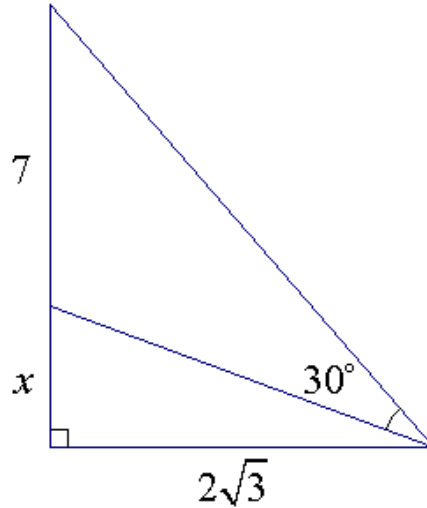
- A)  $3\sqrt{3}$  km/h      B)  $4\sqrt{3}$  km/h      C)  $6\sqrt{3}$  km/h      D)  $8\sqrt{3}$  km/h      E)  $9\sqrt{3}$  km/h

13. En el rectángulo ABCD de la figura,  $BC = 3 ND = 6 BM$ . Además,  $BM = AM$ . Calcula  $\text{tg } \theta$ .



- A)  $\frac{5}{3}$       B)  $\frac{5}{7}$       C)  $\frac{7}{5}$       D)  $\frac{4}{3}$       E) 1

14. Halla el valor de  $x$  en la siguiente figura.



- A) 1      B) 2      C) 3      D) 4      E) 5

15. Calcula:

$$E = \frac{\frac{21}{8} \times \frac{20}{7} \times \frac{19}{6} \times \binom{18}{5}}{\binom{18}{5} + \binom{18}{12} + \binom{19}{12} + \binom{20}{8}}$$

Recuerda que  $\binom{m}{n}$  representa el número de combinaciones de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ .

- A) 2      B) 1      C) -2      D)  $\frac{1}{2}$       E)  $-\frac{1}{2}$

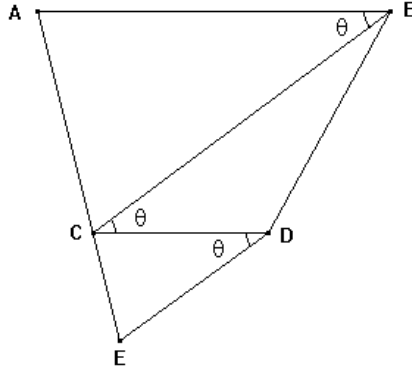
16. ¿Cuál es el menor entero positivo con exactamente 15 divisores? Da como respuesta la suma de sus cifras.

- A) 6      B) 7      C) 8      D) 9      E) 10

17. Halla el menor entero positivo  $n$  con la siguiente propiedad: Dados  $n$  enteros positivos distintos cualesquiera, existen dos cuya suma o diferencia es divisible por 10.

- A) 4      B) 5      C) 6      D) 7      E) 8

18. Considerando la figura mostrada, determine  $\frac{\text{área}(ACD)}{\text{área}(EBC)}$ , es decir, la razón entre las áreas de los triángulos  $ACD$  y  $EBC$ .

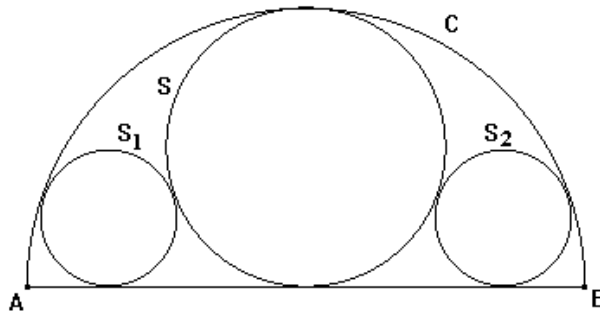


- A) 0,5      B) 1      C) 1,5      D) 2      E) sen  $\theta$

19. La maestra escribe trece números enteros en la pizarra, donde al menos tres de ellos son positivos. Entre los 78 productos dos a dos existen exactamente 22 negativos. ¿Cuántos de los trece números escritos en la pizarra son negativos?

- A) 2      B) 10      C) 7      D) 8      E) 9

20. En la figura,  $C$  es una semicircunferencia de diámetro  $AB$ . Las circunferencias  $S, S_1$  y  $S_2$  son tangentes a  $C$  y a  $AB$ ; además  $S$  es tangente a  $S_1$  y  $S_2$ . Si los radios de  $S_1$  y  $S_2$  miden cada uno de ellos 2 unidades, halle la medida del radio de  $S$ .



- A) 2      B)  $2\sqrt{2}$       C) 4      D)  $4\sqrt{2}$       E) 8

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**