

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Segunda Fase – Nivel 3

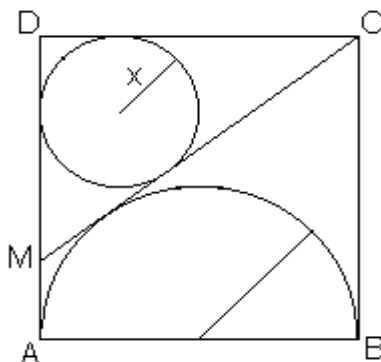
11 de setiembre de 2004

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Don Pancho es un fabricante de ojotas. En la feria dominical pone a la venta un cierto número de pares de ojotas. Vende inicialmente las dos quintas partes y después el presidente de una comunidad campesina le hace un pedido para sus moradores de las tres cuartas partes de lo que le quedaba. Antes de entregar el pedido, Don Pancho se da cuenta de que 600 pares de ojotas estaban mal hechas y solo puede entregar las ocho novenas partes del pedido. ¿Cuántos pares de ojotas fueron pedidos por el presidente de la comunidad?

2. El lado del cuadrado ABCD mide 24 unidades. El segmento CM es tangente a la semicircunferencia de diámetro AB y a la circunferencia pequeña de radio x unidades. Halla el valor de x .



3. Si θ es un ángulo del primer cuadrante tal que $\tan \theta = \frac{1}{6}$, halla el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{37} \left(\sqrt{\frac{\tan \theta + \cot \theta + 2}{\tan \theta + \cot \theta}} - \frac{\cos \theta}{2} \right)$$

4. Se tiene un triángulo ABC recto en B. Si sumas las longitudes de los lados \overline{BC} y \overline{AC} y el resultado lo elevas al cuadrado, obtienes nueve veces el producto de las longitudes de dichos lados. Calcula $\operatorname{sen} A + \operatorname{csc} A$.

5. Un motociclista entrena para una competencia. El primer día recorre 200 km, el segundo día 280 km, el tercer día 360 km y así sucesivamente, cada día 80 km más que el anterior. Si luego de cierta cantidad de días ha recorrido un total de 4680 km, ¿cuántos días duró su entrenamiento?

6. Juanito está en un helicóptero a 2100 m de altura sobre la superficie de un lago. En un instante, él observa con un ángulo de depresión α a la lancha de Eduardo y con un ángulo de depresión θ a la lancha de Henry. Calcula, en metros, la distancia que separa a las lanchas si se conoce que:

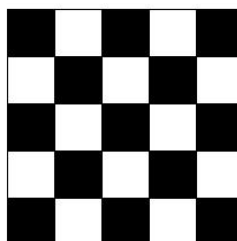
$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \qquad \tan \theta = \frac{7}{24}$$

y que la prolongación del segmento que une las dos lanchas pasa por el pie de la perpendicular bajada desde el helicóptero a la superficie del lago.

7. Sea ABC un triángulo equilátero. Se ubican los puntos M, N y P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de tal modo que $AP = 2BP$, $BM = 2CM$ y $CN = 2AN$. Si el área del triángulo ABC es 126, halla el área del triángulo encerrado por los segmentos AM, BN y CP.

8. Halla el valor de : $\frac{1}{\operatorname{sen}10^{\circ} \operatorname{sen}30^{\circ} \operatorname{sen}50^{\circ} \operatorname{sen}70^{\circ}}$

9. Se ubican 4 fichas en un tablero de 5 x 5 (mostrado en la figura) de tal manera que no hay dos o más fichas en una misma fila ni en una misma columna y además las 4 fichas están en casillas de un mismo color (blanco o negro). ¿ De cuántas maneras se puede hacer dicha ubicación de fichas (cumpliendo las condiciones detalladas) ? .



10. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica :

$$\cos 12x = 5 \operatorname{sen} 3x + 9(\tan x)^2 + (\cot x)^2.$$

Da como respuesta el número de soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN