MINISTERIO DE EDUCACION

SOCIEDAD MATEMATICA PERUANA

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Tercera Fase – Nivel 2

16 de octubre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresa tus respuestas en la computadora tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de recepción de las respuestas.*

1. Tengo cierto número de monedas, algunas en la mano derecha y otras en la izquierda. Si pasara una moneda de la mano derecha a la izquierda, tendría igual número de monedas en cada mano. Si en lugar de ello pasara una moneda de la izquierda a la derecha, tendría en la mano izquierda la mitad de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tengo en total?

2. Doce árboles se encuentran alineados separados cada 5 metros. Un pozo de agua se encuentra alineado con los árboles. El árbol más cercano al pozo se encuentra a 10 metros de éste. Un jardinero se encuentra junto al pozo y dispone solo de un balde con el que lleva un balde de agua al primer árbol, luego regresa por más agua y lleva un balde de agua al segundo árbol y vuelve al pozo. Continúa de esa manera llevando un balde de agua a cada uno de los otros árboles hasta llevar agua al último árbol y volver al pozo. ¿Cuántos metros recorrió el jardinero en total?

3. Sean a y b dos números enteros positivos cuya suma es menor que 50 y tales que

$$10\left(\sqrt[3]{\frac{9}{10}}\right)=\left(\sqrt[a]{a+b}\right)^{b}$$

Halla $\sqrt[3]{ab}$.

4. Calcula la suma de todas las cifras del resultado obtenido al operar:

$$\sqrt{\underbrace{444...444}_{100\text{ dígitos}}-\underbrace{888...888}_{50\text{ dígitos}}}$$

5. Los polinomios $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx+2$, $Q(x)=x^4+cx^3-bx^2+ax+2$ son distintos y tienen solo dos raíces en común. Encuentra el valor de *b*.

6. Sea f un funcion definida en el conjunto de los números enteros positivos tal que:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+1002$$

para todos los x e y enteros positivos. Si $f(2004)=1002$, encuentra $f(5555)$.

7. Halla el mayor valor de x que satisface la siguiente ecuacion en los números reales:

$$\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}}=\frac{5x-6-x^2}{2}$$

8. La fracción f satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{52}{303}<f<\frac{16}{91}$$

Halla el menor valor positivo posible del denominador de f .

9. Halla el máximo valor que puede tomar $x+y+z$, sabiendo que x,y,z son números enteros y que $x^2+y^2+z^2<xy+3y+2z$.

10. En cierto país se desea emitir monedas cuyos valores sean tres cantidades enteras positivas distintas, de tal manera que una persona que lleva k monedas convenientemente elegidas, pueda pagar exactamente cualquier cantidad entera desde 1 hasta 99 (sin recibir vuelto). ¿Cuál es el menor valor que puede tener k?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN