

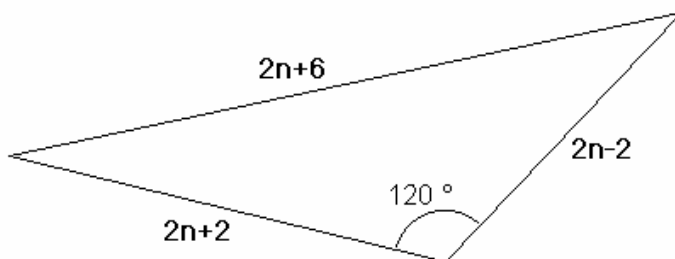
OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Tercera Fase – Nivel 3

16 de octubre de 2004

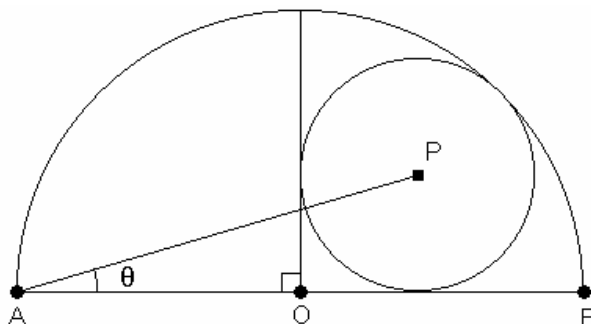
- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresas tus respuestas en la computadora tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de recepción de las respuestas.*

1. Un agricultor tiene un terreno cuya forma y dimensiones se muestran en la siguiente figura (las longitudes de los lados se encuentran en metros)



Si se sabe que el metro de alambre cuesta S/. 1,50, ¿cuántos soles le costará cercar su terreno con 4 hileras de alambre?

2. En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia y P es el centro de la circunferencia inscrita:



Si θ es el ángulo que forman el segmento AP con el diámetro AB, calcula:

$$\cot \theta + 2 \tan \theta$$

3. Para cada número real α y cada entero positivo n se define:

$$m_n(\alpha) = \sec^{n-1} \alpha - \tan^{n-1} \alpha$$

Si A y B son enteros positivos tales que para todo α se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{m_5(\alpha) - m_3(\alpha)}{m_5(\alpha) + m_3(\alpha)} = (\sin A\alpha)^B,$$

halla A + B.

4. Si θ es un ángulo tal que:

$$\frac{\csc \theta - \cot \theta}{\sec \theta - \tan \theta} = 5,$$

calcula el valor de:

$$5 \cot \theta \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right)$$

5. Dado $n \geq 3$, se tienen dos polígonos regulares de n y $2n$ lados inscritos en la misma circunferencia de radio R . Si la suma de sus perímetros está dada por la expresión:

$$kRn \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4n} \right),$$

halla el valor de k .

6. Se dice que un conjunto es *aritmética* si tiene exactamente tres elementos y uno de ellos es igual al promedio aritmético de los otros dos. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tiene al menos 2004 subconjuntos aritméticos?

7. Sea M dado por:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \dots + \frac{\sqrt{32(33)}}{65}$$

Entre los enteros positivos que son menores que M , ¿cuál es el mayor?

8. Halla el valor de :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 9^\circ} \left(\frac{1}{\cot 9^\circ - 3 \operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\cot 27^\circ - 3 \operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\cot 81^\circ - 3 \operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\cot 243^\circ - 3 \operatorname{tg} 243^\circ} \right)$$

9. En un pentágono convexo $ABCDE$ se sabe que $AB = 6$; $\angle ADB = 120^\circ$; $\angle AED = 90^\circ$ y $\angle DCB = 90^\circ$. La mayor longitud posible de la diagonal CE es $m + \sqrt{n}$, con m y n enteros positivos. Halla mn .

10. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Halla el número de funciones $f: A \rightarrow A$ que tienen la siguiente propiedad:

No existen tres números distintos $a, b, c \in A$ tales que $f(a) = f(b) = f(c)$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN