

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Cuarta Fase – Nivel 2

13 de noviembre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TU SOLUCIÓN

1. Sean a y b números enteros tales que la ecuación en x

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x$$

tiene solo una raíz entera. Encuentra los valores de a , b y las correspondientes raíces de la ecuación. Da todas las respuestas.

2. En una pizarra se escriben 20 números enteros consecutivos de dos cifras. Luego, se borran, en primer lugar, los que terminan en 7 y en segundo lugar los múltiplos de 7. Si la suma de los números que quedan es 660, ¿cuál es el menor número que se escribió en la pizarra?
3. Sean m y n números enteros tales que $m \geq n \geq 0$. Encuentra todos los pares $(m; n)$ que satisfacen:

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$$

4. En el siguiente tablero de 2 filas y 10 columnas:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

las casillas de la primera fila se llenan con los dígitos del 0 al 9. En cada casilla de la segunda fila se escribe un número de tal manera que, en cada columna, el número de la segunda fila sea igual a la cantidad de veces que el dígito de la primera fila aparece en todo el tablero. Diremos entonces que el *tablero se ha llenado correctamente*.

Por ejemplo, el siguiente tablero de 2 filas y 4 columnas se encuentra correctamente lleno:

1	2	3	4
3	1	3	1

pues el 1 aparece 3 veces en el tablero, el 2 aparece 1 vez en el tablero, el 3 aparece 3 veces en el tablero y el 4 aparece 1 vez en el tablero.

Sólo existen dos formas de llenar correctamente el tablero dado de 2 filas y 10 columnas. Encuentra dichas formas.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN