

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2004

Cuarta Fase – Nivel 3

13 de noviembre de 2004

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones justificando adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TU SOLUCIÓN

1. Sea a un número de n dígitos ($n > 1$). Un número b de $2n$ dígitos se obtiene escribiendo dos copias de a una a continuación de la otra. Si $\frac{b}{a^2}$ es un número entero k , encuentra los posibles valores de k .
2. Se tienen 100 monedas aparentemente iguales, donde al menos una de ellas es falsa. Las monedas verdaderas son de igual peso y las monedas falsas también son de igual peso, pero más livianas que las verdaderas. Explica cómo se puede hallar la cantidad de monedas falsas usando una balanza de platillos, a lo más 51 veces.
3. Sean x, y, z números reales positivos, menores que π , tales que:
$$\cos x + \cos y + \cos z = 0$$
$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$$
$$\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0.$$

Halla todos los valores que puede tomar $\sin x + \sin y + \sin z$.

4. Halla el menor número real x para el cual existen dos triángulos no congruentes, cuyos lados tienen longitudes enteras y el valor numérico del área de cada triángulo es x .

Nota: Puedes usar la fórmula de Herón para el área S de un triángulo de lados a, b y c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro del triángulo, es decir $p = \frac{a+b+c}{2}$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN