OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

Primera Fase – Nivel 3

15 de julio de 2005

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Al convertir $\frac{16x}{9}\pi$ radianes al sistema sexagesimal se obtiene 640°. Halla el valor de x.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 6
E) 9

2. Simplifica:

$$\left(\left(\frac{2}{4}\right)^{-1}\right)^{2}\left(\frac{8}{2}\right)^{3}+\left(\sqrt[3]{4\sqrt{4}}\right)^{2}.$$

A) 68
B) 256
C) 512
D) 260
E) 288

3. Simplifica:

$$M=\left(\left(\frac{\csc 45^\circ}{\tan^2 60^\circ-\dfrac{1}{sen\,30^\circ}}\right)^{-\sec\,60^\circ}\right)^{\cot 45^\circ}.$$

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 2
D) $\frac{5}{2}$
E) $\frac{7}{2}$

4. En un triángulo rectángulo *ABC* recto en *A* de área 0,5 m^2, calcula:

$$\frac{AC^2}{tan\ B}+\frac{AB^2}{tan\ C}.$$

A) 0,5 m^2
B) 1 m^2
C) 2 m^2
D) 3 m^2
E) 4 m^2

5. Tomás cosechó 27 500 kg de arroz con cáscara y lo vendió a 0,80 nuevos soles el kilogramo. Julián cosechó igual cantidad de arroz y lo hizo descascarar obteniendo los $\frac{3}{5}$ del peso original en arroz blanco. Luego, llenó su arroz en sacos de 50 kg y lo vendió cada uno a 80 nuevos soles. ¿Cuánto más o cuánto menos obtuvo de ganancia Julián con respecto a Tomás considerando que el costo por mandar a descascarar cada 100 kg de arroz es 9 nuevos soles, y sin considerar costos a de producción?

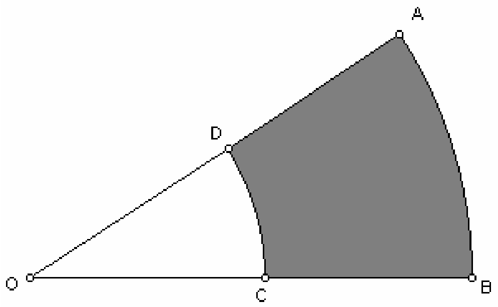
A) S/. 4 400 más
B) S/. 2 475 más
C) S/. 1 925 más
D) S/. 4 400 menos
E) Obtuvo la misma ganancia.

6. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{sen\ x}{1-\cot x}+\frac{\cos x}{1-\tan x}.$$

A) $sen\ x+\cos x$
B) $sen\ x-\cos x$
C) $\tan x+\cot x$
D) $\tan x-\cot x$
E) 1

7. En la figura mostrada, O es centro de los arcos AB y DC. Calcula el área del trapecio circular sombreado mostrado en la figura, sabiendo que la longitud del arco AB es a, la longitud del arco DC es b y la longitud del segmento AD es c.



A) $\frac{c(a+b)}{2}$

B) $\frac{a^2c}{2(a-b)}$

C) $\frac{c^2a}{2(a-b)}$

D) $\frac{c(a-b)}{2}$

E) $\frac{abc}{2(a-b)}$

8. Sean P y M los puntos medios de los lados AD y CD, respectivamente, de un cuadrado ABCD. Si α es el ángulo PBM, calcula el valor de

$$36(1+Cot\ \alpha).$$

A) 63
B) 84
C) 81
D) 90
E) 96

9. El ángulo x mide 15° más que el ángulo y. Si ambos ángulos son agudos y además

$$sen\ 2x.\sec\ 4y = 1,$$

calcula la suma de los valores que puede tomar y.

A) 10°
B) 40°
C) 60°
D) 80°
E) 90°

10. Una liebre que es perseguida por un perro le lleva de ventaja 90 de sus saltos. La liebre da 5 saltos mientras el perro da 4, pero 7 saltos de la liebre equivalen a 5 saltos del perro. ¿Cuántos saltos tendrá que dar el perro para alcanzar a la liebre?

A) 200
B) 300
C) 500
D) 600
E) 900

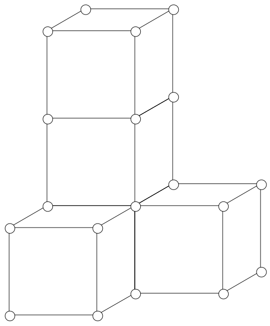
11. Desde la parte más alta de la Catedral, cuya altura es de 50 metros, se observa la puerta del Concejo Municipal y la Pileta de la Plaza de Armas, ambos ubicados en un mismo plano horizontal. La Pileta, que está al sur de la catedral, es observada con un ángulo de depresión de 30°, mientras que la puerta del Concejo, que se encuentra al este de la Catedral, es observada con un ángulo de depresión de 60°. Calcula la distancia entre la puerta del Concejo Municipal y la Pileta.

A) 91,3 m
B) 92,3 m
C) 90,3 m
D) 97,3 m
E) 95,3 m

12. Una semicircunferencia de diámetro AB se divide, mediante 29 puntos, en treinta arcos de igual longitud. Los 29 puntos están numerados en sentido horario con el 1, 2, 3, ..., 29. Calcula la longitud de la proyección, sobre dicho diámetro, del arco comprendido entre los puntos 5 y 10, sabiendo que la longitud de AB es $2+2\sqrt{3}$.

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 1
D) $\frac{5}{4}$
E) 2

13. Para pintar un cubo se gasta 5 nuevos soles en pintura. ¿Cuántos nuevos soles se gastará en pintura para pintar cinco cubos del triple de arista que los anteriores si se encuentran pegados formando el sólido mostrado en la figura?



Considera que se debe pintar todas las caras exteriores, incluyendo las caras de la base del sólido.

A) 105
B) 145
C) 135
D) 145
E) 165

14. La ecuación en x

$$x^2 - 6x + n^2 = 0$$

tiene dos raíces reales a y b. Calcula el valor de la expresión E, donde

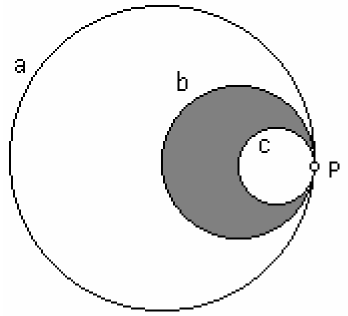
$$E = \log_n a^a + \log_n a^b + \log_n b^a + \log_n b^b .$$

A) 4
B) 6
C) 12
D) 9
E) 36

15. El número de cinco dígitos $\overline{32a1b}$ es múltiplo de 156. Calcula $ab + a - b$.

A) 57
B) 55
C) 33
D) 21
<u>E) 36</u>

16. Tres circunferencias a, b y c son tangentes entre si en el punto P, como se muestra en la siguiente figura.



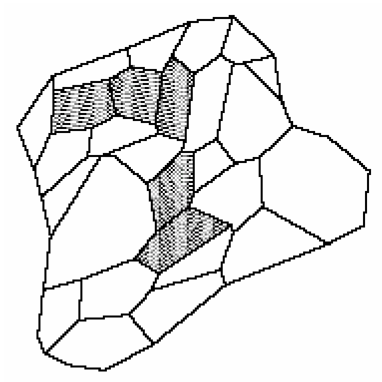
El centro de b se encuentra sobre c y el centro de a se encuentra sobre b. ¿Cuál es la razón entre el área de la región sombreada y el área total de las regiones no sombreadas limitadas por las circunferencias?

A) $\frac{4}{13}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{3}{16}$
D) $\frac{3}{13}$
E) $\frac{1}{8}$

17. Se cortan las esquinas de un cuadrado de papel de lado x mediante cortes rectos, de tal modo que el pedazo de papel que queda tiene la forma de un octágono regular. Calcula la longitud del lado de este octágono regular.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$
B) $2x\left(2+\sqrt{2}\right)$
C) $\frac{x}{\sqrt{2}-1}$
D) $x\left(\sqrt{2}-1\right)$
E) $x\left(\sqrt{2}+1\right)$

18. La isla de Urcos tiene 27 estados, cada uno de los cuales pertenece a uno de dos grupos enemigos entre si: el gris y el blanco. La Organización de las Naciones Unidas quiere que haya paz en Urcos, para lo cual convertirá cada vez que sea necesario un estado cualquiera al grupo opuesto – esto es, convertirá un estado de blanco a gris o de gris a blanco – hasta conseguir que todos los estados sean del mismo grupo. Al hacer esto, Naciones Unidas debe garantizar que en ningún momento alguno de los estados esté completamente rodeado por estados del grupo opuesto. Observa que un estado de la costa nunca puede estar completamente rodeado, lo cual puede ser aprovechado por las Naciones Unidas para lograr su objetivo. A continuación se muestra un mapa actual de la isla de Urcos.



Los cinco estados sombreados pertenecen al grupo gris y todos los demás al grupo blanco. ¿Con cuántos cambios de grupo, como mínimo, se logra pacificar completamente Urcos?

A) 5
B) 7
C) 9
D) 10
E) 12

19. En cierto momento, la población de Uchuaco era un cuadrado perfecto. Tiempo después, con un aumento de 100 habitantes, la población era mayor en 1 que un cuadrado perfecto. Actualmente, con un aumento adicional de 100 habitantes, la población es nuevamente un cuadrado perfecto. La población original de Uchuaco era un múltiplo de

A) 5
B) 7
C) 9
D) 11
E) 17

20. Un cubo de un metro de arista es ubicado contra un muro vertical. Una escalera de $\sqrt{15}$ metros de longitud es apoyada en el muro y toca una de las aristas libres del cubo. ¿Cuántos metros puede alcanzar como máximo, respecto del piso, el extremo superior de la escalera?

A) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

B) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

C) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

D) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

E) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN