MINISTERIO DE EDUCACION

SOCIEDAD MATEMATICA PERUANA

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

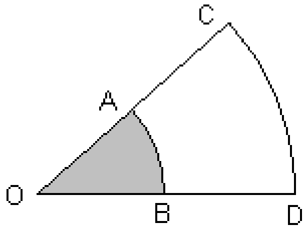
Segunda Fase – Nivel 3

19 de agosto de 2005

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. En la siguiente figura O es el centro de las circunferencias que contienen a los arcos AB y CD. La longitud del arco AB es 8 unidades, la longitud del arco CD es 12 unidades y la longitud del segmento AC es 4 unidades. Halla el área del sector circular AOB.



2. Si α y β son ángulos agudos complementarios tales que $\sec\alpha = m + 1{,}6$ y $\csc\beta = 3m - 0{,}4$. Calcula $5\tan\alpha + 13\cos\beta$.

3. Si x es un ángulo agudo y $\theta + \phi = 22^\circ 30'$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{1-\sec(3\theta+\phi+x)}{1-\csc(\theta+3\phi-x)} + \frac{1+\cot(2\theta+3\phi-x)}{1+\tan(2\theta+\phi+x)}$$

4. ¿Cuántos metros mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si se sabe que su área es igual a $18m^2$ y que $\tan A + \tan C = 4\cot C.\cot A$?

5. Un niño sostiene en una mano dos globos mediante un par de hilos formando un ángulo. El primer globo está orientado hacia el norte y el segundo hacia el sur. El ángulo de elevación del primer globo es de 21° y el hilo que lo sostiene mide $3\sqrt{5}$ *m*. El ángulo de elevación del otro globo es de 24° y el hilo que lo sostiene mide $3\sqrt{10}$ *m*. ¿Cuál es, en metros, la distancia que hay entre los globos?

6. Dados 7 puntos distintos del plano, se pintan de color rojo los puntos medios de todos los segmentos determinados por estos puntos. Halla la cantidad mínima de puntos rojos.

7. La función f , definida en los enteros positivos cumple las siguientes propiedades:

- $f(1) = 1$,
- $4f(n)f(n+1) = \left(f(n) + f(n+1) - 1\right)^2$, para todo $n \geq 1$,
- f es creciente.

Halla $f(77)$.

8. Sean x , y dos números reales tales que $\tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 1 - 2x - x^2$.

Determina el menor valor positivo de y . Da como respuesta $E = \frac{120}{\pi}(1+\pi-y)$.

9. En el plano cartesiano, cada punto de coordenadas enteras se denomina *punto entero*. Sea $f(n)$ la cantidad de puntos enteros que se encuentran en el segmento que une el origen de coordenadas con el punto entero $(n, n+3)$ (sin contar los extremos). Halla el valor de

$$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2005) .$$

10. En un círculo de centro O se trazan dos cuerdas perpendiculares entre sí. La distancia de O a una de ellas es 9 unidades y de O a la otra es 5 unidades. Las cuerdas dividen al círculo en cuatro regiones. Considera la suma de las áreas de las regiones de mayor y menor área, y la suma de las áreas de las otras dos regiones. Halla la diferencia entre estas dos sumas.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN