

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

Tercera Fase – Nivel 2

30 de setiembre de 2005

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresar tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.*
- *La respuesta de cada problema es un **número entero**.*

1. En el triángulo  $ABC$ , los puntos  $D$  y  $M$  se encuentran sobre los lados  $AC$  y  $BC$ , respectivamente. Se sabe que  $AB = BD$ ,  $\angle DBC = 48^\circ$  y  $\angle ABD = \angle MAC = \angle BCA$ . Halla, en grados sexagesimales, el menor ángulo que forman los segmentos  $AM$  y  $BD$ .
2. En el centro de un terreno rectangular de  $60m \times 80m$  se construirá una piscina rectangular de modo que el espacio restante constituya un sendero de ancho uniforme que rodeará a la piscina. El área que ocupará la piscina es  $\frac{1}{6}$  del área del terreno. ¿Cuántos metros mide el ancho del sendero?
3. ¿Cuántos números enteros positivos de tres cifras tienen algún 7 en su escritura?
4. Si  $x$  es un número real mayor que 1, simplifica

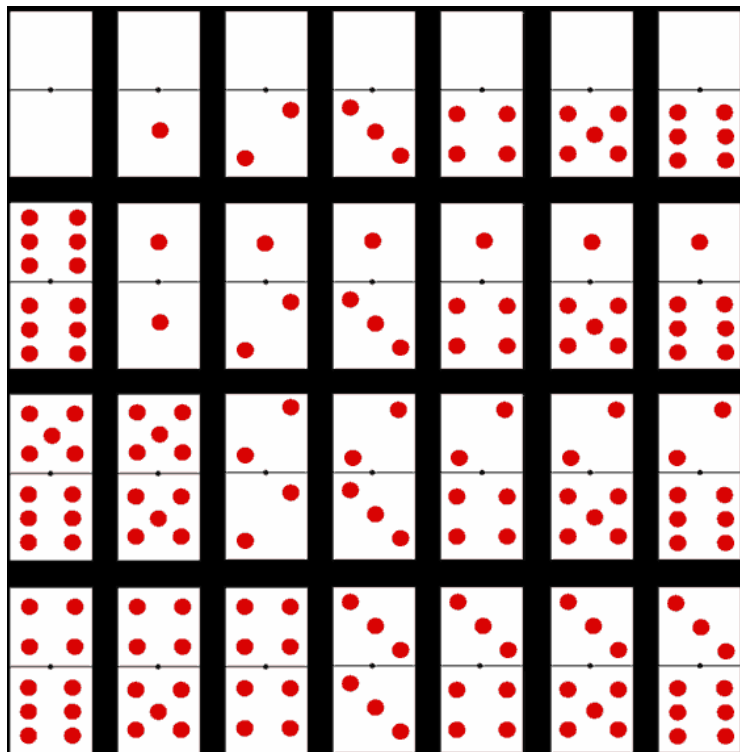
$$\sqrt[x-1]{\frac{3^{x-1} + 4^{x-1} + 6^{x-1}}{4^{1-x} + 6^{1-x} + 8^{1-x}}}$$

5. Si  $p$  y  $q$  son números enteros positivos tales que  $\frac{5}{8} < \frac{p}{q} < \frac{7}{8}$  ¿cuál es el menor valor de  $p$  si se debe cumplir que  $p + q = 2005$ ?
6. Sean  $x$  e  $y$  números enteros tales que  $4x + 5y = 7$ . Halla el mínimo valor de  $5|x| - 3|y|$ .
7. Dado el siguiente polinomio:

$$P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$$

Halla la suma de los valores absolutos de los enteros  $n$ , de modo que  $P^2(n)$  sea el cuadrado de un número primo.

8. Las fichas de dominó son rectángulos cada uno de los cuales está formado por dos cuadrados. Cada uno de estos cuadrados tiene un número de puntos entre 0 y 6, inclusive. El siguiente gráfico muestra las 28 fichas de dominó existentes.



Se coloca en cierto orden las 28 fichas de dominó en un rectángulo de  $7 \times 8$ . En el diagrama se muestra la cantidad de puntos existentes en cada posición.

6	0	4	2	2	3	3	6
4	4	2	1	5	3	5	1
0	4	6	5	6	1	5	2
0	5	1	1	1	0	2	4
1	4	2	3	0	2	1	0
4	5	2	0	6	6	3	5
3	6	6	3	4	5	3	0

¿Cuál es el número de fichas que se encuentran completamente incluídas en la zona sombreada del rectángulo?

9. Si  $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{19}{99}$ , calcula  $E = 99 \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right)$ .

10. En un tablero de ajedrez, de  $8 \times 8$  casillas, un rey se encuentra en la casilla R. Cada movimiento del rey es el desplazamiento de una casilla, horizontalmente, verticalmente o en diagonal.

							S
R							

¿De cuántas formas puede ir el rey de la casilla R a la casilla S en exactamente 8 movimientos?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**

**¡NO OLVIDES GRABAR TUS RESPUESTAS!**