

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2005

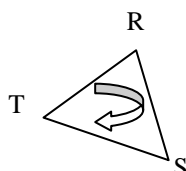
Cuarta Fase – Nivel 3

19 de noviembre de 2005

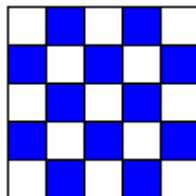
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Cada problema bien resuelto y **debidamente justificado** se calificará con 25 puntos.
- Entrega sólo tu cuadernillo de soluciones.

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TU DESARROLLO

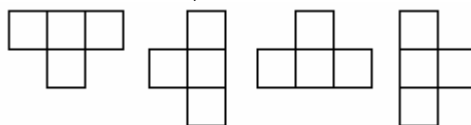
1. Si $p = (1 - \cos x)(1 + \sin x)$ y $q = (1 + \cos x)(1 - \sin x)$, escribe la expresión $\cos^2 x - \cos^4 x - \sin 2x + 2$ en términos de p y q .
2. Las medidas, en grados sexagesimales, de los ángulos α , β y θ son mayores que 0 y menores que 60. Halla el valor de θ sabiendo, además, que $\alpha + \beta = 2\theta$ y que $\sin \alpha \sin \beta \sin \theta = \sin(60 - \alpha) \sin(60 - \beta) \sin(60 - \theta)$
3. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos sobre una recta ℓ , de tal modo que $AB = BC = CD$. En uno de los semiplanos determinados por la recta ℓ , se eligen los puntos P y Q de tal manera que el triángulo CPQ es equilátero con sus vértices nombrados en sentido horario. Sean M y N dos puntos del plano tales que los triángulos MAP y NQD son equiláteros (los vértices también están nombrados en sentido horario). Halla el ángulo $\angle MBN$.
Aclaración: Los vértices del triángulo equilátero RST que se muestra, están nombrados en el sentido horario



4. En el tablero cuadrilado que se muestra, se coloca una ficha en cada casilla blanca.



Una jugada consiste en elegir cuatro casillas del tablero que forman una "T" en cualquiera de las formas que se muestran a continuación,



y añadir una ficha en cada una de estas cuatro casillas. ¿Será posible, luego de realizar varias jugadas, conseguir que las 25 casillas tengan la misma cantidad de fichas?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN