

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Primera Fase – Nivel 3

09 de junio de 2006

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar notas o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Si $K = 7 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{4^2}{2^4}$ y $J = K^{1/2} + (1 - K)^2 + \left(\frac{K}{27}\right)^{-1}$, el valor de $J + K$ es:
 A) 74 B) 76 C) 77 D) 78 E) 79

2. Sea ABC un triángulo rectángulo recto en C . Calcula:

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } 45^\circ}{\text{cos } A + \text{cos } B + \text{cos } 45^\circ}$$
 A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{1}{2}$

3. Una escalera recta apoyada en una planta vertical de coco forma un ángulo de 60° con la horizontal del suelo. La escalera mide 4 metros de largo y se verifica que del extremo superior de la escalera aún faltan 3 metros para llegar al primer fruto de coco. La distancia que hay desde el suelo hasta el punto donde se encuentra el primer coco es
 A) mayor que 9 metros
 B) mayor que 8 metros y menor que 9 metros
 C) mayor que 7 metros y menor que 8 metros
 D) mayor que 6 metros y menor que 7 metros
 E) mayor que 5 metros y menor que 6 metros.

4. Las longitudes de los lados de un rectángulo de área 108 m^2 se diferencian en 3 metros. Halla la menor razón trigonométrica del ángulo formado por la diagonal y uno de los lados.
 A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

5. Se sabe que $x \text{ sen } A + y \text{ cos } A = x$; ($x \neq \pm y$)
 Halla $\text{cosec } A$ en función de x e y , asumiendo que $0^\circ < A < 90^\circ$.
 A) $\frac{x+y}{x-y}$ B) $\frac{x-y}{x+y}$ C) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ D) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ E) $\frac{x^2}{y^2}$

6. En un triángulo rectángulo las medidas de las longitudes de sus lados son 8, $x + 5$ y $x + 7$. Halla el seno del mayor de los ángulos agudos del triángulo, si $x > 3$.
- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{8}{17}$ C) $\frac{15}{17}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$
7. Un padre brasileño, emocionado por el mundial, decide darle una propina a su hijo. Por el total de goles que meta cada jugador de la selección brasileña le dará en dólares el equivalente al cuadrado de esos números. Si se sabe que solo metieron goles Ronaldhino, Ronaldo y Kaká, que anotaron en total 13 goles y que su hijo recibió 57 dólares en total. ¿Cuántos goles anotó Ronaldhino, si fue el que más goles anotó?
- A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7
8. La expresión $x\#y$ sólo es válida si $x=2m^n$, $y=3n^m$, donde m y n son enteros positivos con $n \neq 1$. Si se define $x\#y = \sqrt{m^2 + n^2}$, halla el máximo valor que puede tomar la expresión $128\#y$.
- A) 5 B) $2\sqrt{17}$ C) $2\sqrt{10}$ D) $\sqrt{4097}$ E) 768
9. Si α y β son ángulos agudos y $\alpha > \beta$, entonces
- A) $\text{sen}(\alpha - \beta) > \text{sen} \alpha - \text{sen} \beta$
 B) $\text{sen}(\alpha - \beta) < \text{sen} \alpha - \text{sen} \beta$
 C) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha - \text{sen} \beta$
 D) $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha - \text{sen} \beta$
 E) $\text{sen}(\alpha - \beta) < \text{cos} \alpha - \text{cos} \beta$
10. Halla la suma de las soluciones de la ecuación $2(\text{sen} x + \text{cos} x)^2 = 2 + \sqrt{3}$, siendo x un ángulo agudo.
- A) 90° B) 180° C) 270° D) 360° E) No hay solución
11. Se tiene un cuadrado $ABCD$. Se ubica el punto M en CD tal que $DM = 2MC$. Sea F el punto de intersección de BD y MA . La recta CF interseca a AD en N . Calcula $\frac{AN}{ND}$.
- A) 4 B) 0.5 C) 0.2 D) 0.25 E) 2
12. $ABCD$ es un cuadrilátero con $AB = 8$, $BC = 6$, $BD = 10$, $\angle DAB = \angle CDA$ y $\angle ABD = \angle BCD$. Hallar CD
- A) 10 B) 12 C) $\frac{25}{2}$ D) $\frac{64}{5}$ E) 16
13. En un triángulo rectángulo ABC recto en B , se ubican los puntos N y M en CB y AB , respectivamente, de modo que $CN = 6$, $NB = 4$ y $AM - MB = 1$. Si O es el punto de intersección de las rectas AN y MC ; y los triángulos AOM y CON tienen igual área, calcula la tangente del ángulo OMB .
- A) 1 B) $\frac{1}{5}$ C) 5 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

14. ABC es un triángulo con $AB = 9$, $BC = 15$ y $CA = 16$. D es un punto de AC tal que la medida del ángulo ABD es el doble de la medida del ángulo DBC. Halla el coseno del ángulo ADB.

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

15. Los enteros positivos A, B, C y D satisfacen $A^5 = B^4$, $C^3 = D^2$ y $C = A + 19$. Encontrar $D - B$.

- A) 757 B) 697 C) 728 D) 968 E) 657

16. Sean a, b, c, d números reales cuya suma es cero y sean

$$E = \frac{a^2}{(a+2b)} + \frac{b^2}{(b+2c)} + \frac{c^2}{(c+2d)} + \frac{d^2}{(d+2a)}$$

$$F = \frac{b^2}{(a+2b)} + \frac{c^2}{(b+2c)} + \frac{d^2}{(c+2d)} + \frac{a^2}{(d+2a)}$$

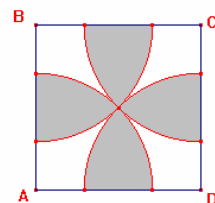
Halla la cantidad de valores enteros que toma $\frac{E}{F}$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC = 5$ y $BC = 6$. El punto D está en AC y P es un punto en BD tal que $\angle APC = 90^\circ$. Si $\angle ABP = \angle BCP$, calcula $\frac{AD}{DC}$.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) 1

18. En el cuadrado ABCD de lado $4\sqrt{2}$, la región sombreada está limitada por arcos de circunferencias con centros en los vértices del cuadrado, como se muestra en la figura:
Calcula el área de la región sombreada.



- A) $16(\pi - 2)$ B) $4(\pi - 1)$ C) $8(\pi - 2)$ D) $2(\pi - 2)$ E) $12(\pi - 2)$

19. En un triángulo se cumple: sus alturas están en progresión geométrica y sus lados en progresión aritmética. Calcula la suma del mayor y menor ángulo de dicho triángulo.

- A) 127° B) 90° C) 135° D) 120° E) 150°

20. En un tablero de 5×5 , ¿de cuántas maneras se pueden colocar tres fichas idénticas, cada una en el centro de una casilla, de tal modo que formen un triángulo rectángulo con catetos paralelos a los lados del tablero?

- A) 25 B) 100 C) 400 D) 625 E) 16

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN