

## OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

### Segunda Fase – Nivel 2

18 de agosto de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

### ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

### EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. ¿Para cuántos valores enteros de  $k$  el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única?

$$x^2 + y^2 = 2k^2$$

$$kx - y = 2k$$

2. Un número entero positivo es “simpático” si es múltiplo del producto de sus cifras. Por ejemplo 312 es simpático porque  $312=52 (3 \times 1 \times 2)$ . ¿Cuántos números simpáticos de dos cifras existen?

3. Para cada **entero positivo**  $n$  se define  $f(n)$  como el cuadrado de la suma de las cifras de  $n$ . Encuentra  $f(f(f( \dots f(2) \dots )))$ , donde  $f$  se aplica 2006 veces.

4. ¿Cuántos números **enteros**  $x$  cumplen que  $\frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 + 4x + 5}$  es un **entero**?

5. En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto P de manera que  $AB + BP = PC$ . Sea R el punto medio de AC. Si la medida del ángulo RPC es  $43^\circ$ , halla la medida del ángulo ABC.

6. La siguiente lista infinita 149162536... , se ha formado escribiendo los cuadrados de todos los números enteros positivos, uno a continuación del otro, en orden creciente. ¿Qué dígito ocupa la posición 1000 en esta lista?

7. Si  $x^2 - x - 1$  es un factor del polinomio  $ax^7 + bx^6 + 1$ , donde  $a$  y  $b$  son números **enteros**, encuentra  $b - a$ .

8. Encuentra el **mayor entero positivo**  $n$  para el cual existe un único entero  $k$  tal que

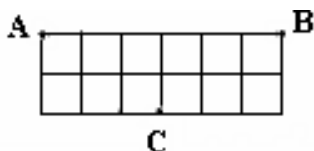
$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}.$$

9. Halla el menor valor **entero** que puede tomar la expresión

$$12\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  números **reales no negativos** para los cuales tengan sentido las fracciones consideradas.

10. Se tiene el siguiente tablero de  $2 \times 6$



Halla de cuántas maneras se puede ir desde el punto **A** hasta el punto **B** desplazándose por los segmentos del tablero respetando las siguientes reglas:

- No se puede pasar dos veces por un mismo punto.
- Sólo se pueden hacer tres tipos de movimientos desplazándose por los segmentos: hacia la derecha, hacia arriba, hacia abajo.
- Se tiene que pasar por el punto **C**.

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**