

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Segunda Fase – Nivel 3

18 de agosto de 2006

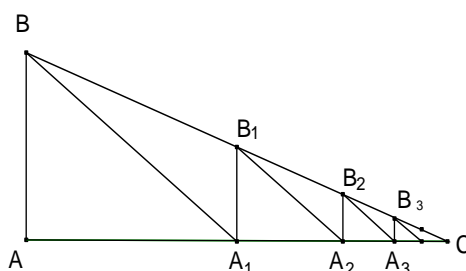
- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.*
- *Entrega tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.*
- *Puedes llevar las hojas con los enunciados de las preguntas.*

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. Halla el valor de : $2(\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 90^\circ)$.
2. En un triángulo rectángulo ABC con catetos AB=20 y AC=21, los puntos D y E pertenecen a la hipotenusa, siendo BD=8 y EC=9. Calcula, en grados sexagesimales, la medida del ángulo DAE.
3. Si $\operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{tg} \theta = 5$, halla el valor de $(2 \operatorname{sec} \theta + 1)^2 - (\cos \theta + 2)^2$.
4. Si $(1 + \operatorname{sec} x)(1 + \operatorname{csc} x) = \frac{20}{3}$, halla $100(\operatorname{sec} x - 1)(\operatorname{csc} x - 1)$.
5. En el diagrama, ABC es un triángulo rectángulo con catetos AB=3 y AC=8. A₁ es punto medio de AC y los segmentos BA₁, B₁A₂, B₂A₃, ..., B₈A₉ son paralelos entre sí. Además los segmentos A₁B₁, A₂B₂, ..., A₉B₉ son perpendiculares a AC. Encuentra el valor de:

$$2^9 (BA_1 + B_1A_2 + B_2A_3 + \dots + B_8A_9)$$



6. Si $1+3+5+7+ \dots+(2n+1) = 6+8+10+ \dots +2m$ siendo m y n **enteros positivos**, halla $m+n$.
7. Dada $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x) + 2}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$, sean M y m el mayor y el menor valor de $f(x)$, respectivamente. Calcula $(M+m)^2$.

8. ¿Cuántos números de siete cifras cumplen simultáneamente las siguientes tres condiciones?
- Todas sus cifras son diferentes.
 - Sus cifras pertenecen al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - El número es múltiplo de 11.

9. ¿Cuál es el mayor **entero positivo** par que **no** puede expresarse como la suma de dos números impares compuestos?

Nota.- Un número es compuesto si es mayor que 1 y no es primo.

10. Si en un triángulo ABC se cumple que $AB = 9$ y $\frac{BC}{CA} = \frac{40}{41}$, ¿cuál es el mayor valor posible del área del triángulo ABC ?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN