

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Tercera Fase – Nivel 2

6 de octubre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.*

EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA CORRECTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

1. Rosa y Susana tienen ciertas cantidades de dinero. Si Rosa le diera a Susana la tercera parte de lo que tiene, Susana tendría S/. 90 más que Rosa, pero si Susana le diera a Rosa la tercera parte de lo que tiene, Rosa tendría S/. 50 más que Susana. ¿Qué cantidad de dinero tienen Rosa y Susana juntas?
2. Para dos números enteros positivos a y b llamamos $MCD(a, b) = d$ y $MCM(a, b) = m$
Si se cumple que:
 - $a > b$
 - a no es múltiplo de b
 - $m \cdot d = 60$
 - $m^2 - d^2 = 896$halla $a - b$
3. ¿Cuántos números capicúas de 7 dígitos son múltiplos de 4? (El número no puede comenzar con 0.)
4. ¿Para cuántos números enteros x se cumple que $x^2 + 3x + 5$ es un cuadrado perfecto?
5. Sea f la función que asigna a cada número natural n la suma de los cubos de sus dígitos. Calcula $f(f(\dots f(80)\dots))$ (Aplica 2006 veces f)
6. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, tal que $P(1) = 3$, $P(2) = 7$. Calcula el residuo de dividir $P(2006)$ entre 15.
7. (a, b, c, d, e, f) es una permutación de $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Si M es el producto de a, b y c ; y N es el producto de d, e y f ; halla el menor valor que puede tomar $M + N$.
8. Halla el valor absoluto del coeficiente de x^2 en el polinomio
$$P(x) = (1 - x)(1 + 2x)(1 - 3x)(1 + 4x)\dots(1 - 9x)(1 + 10x).$$
9. ¿De cuántas maneras se puede pintar un tablero rectangular de 4 filas y 5 columnas siguiendo las siguientes reglas?
 - a) Cada casilla del tablero se debe pintar de rojo o de blanco
 - b) En cada columna la cantidad de casillas rojas debe ser igual a la cantidad de casillas blancas.
 - c) No debe haber 4 casillas del mismo color cuyos centros formen un rectángulo con lados paralelos a los del tablero.
10. ¿Cuántos polinomios $p(x)$ de **grado mayor o igual que 1** y de coeficientes enteros cumplen la condición $16p(x^2) = [p(2x)]^2$, para todo número real x ?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN