



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)



Sociedad Matemática
Peruana

Primera Fase - Nivel 3

13 de julio del 2007

-
- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
 - Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
 - Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.
-

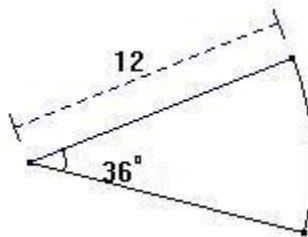
MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Calcula el valor de

$$\frac{2^n \times 6^{n+3}}{3^{n+1} \times 4^n}$$

- A) 144 B) 48 C) 108 D) 36 E) 72

2. Se desea disminuir el ángulo del siguiente sector circular en 27° :



¿Cuál debe ser el nuevo radio para que el área no varíe?

- A) 18 B) 16 C) 24 D) 36 E) 28

3. En un colegio hay 5 salones de primer grado y las cantidades de alumnos que hay en cada salón pueden ponerse en progresión aritmética. El salón menos numeroso tiene 30 alumnos y en el primer grado hay 170 alumnos en total. Halla la cantidad de alumnos del salón más numeroso.

- A) 34 B) 38 C) 42 D) 44 E) 46



Primera Fase - Nivel 3

4. Se tiene una caja de zapatos de caras rectangulares, tres de las cuales tienen las siguientes áreas: 192 cm^2 , 336 cm^2 y 252 cm^2 . Halla la distancia entre dos vértices de la caja que no están en una misma cara.

A) 20 cm B) $3\sqrt{69} \text{ cm}$ C) $\sqrt{697} \text{ cm}$ D) 36 cm E) 29 cm

5. ¿Para qué valor de M la siguiente expresión es constante (es decir, no depende de x)?:

$$\sin^4 x(1 - M \sin^2 x) + \cos^4 x(1 - M \cos^2 x)$$

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) -1 E) 0

6. En un triángulo rectángulo ABC , recto en C , se cumple que

$$6 \cos^3 A = \frac{\sin A + \sin B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

Calcula $\operatorname{tg} A$.

A) 2 B) 3 C) $\frac{1}{3}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

7. Una empresa de transportes ofrece asientos para fumadores al precio de S/.600 y para no fumadores al precio de S/.100. Al no fumador se le permite llevar 20 kg de peso y al fumador 50 kg. Si el ómnibus de la empresa tiene 90 asientos y admite un equipaje de hasta 3000 kg. ¿En cuál de los siguientes casos la empresa obtiene el máximo ingreso?

- A) 60 no fumadores y 0 fumadores
- B) 40 no fumadores y 50 fumadores
- C) 50 no fumadores y 40 fumadores
- D) 0 no fumadores y 90 fumadores
- E) 0 no fumadores y 60 fumadores

8. Si a es un entero positivo tal que $2x + a = y$, $a + y = x$, $x + y = z$. Halla el máximo valor de $x + y + z$.

A) -1 B) -10 C) 0 D) 1 E) 10



Primera Fase - Nivel 3

9. Sean α y β ángulos agudos tales que:

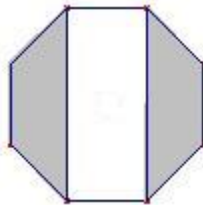
$$\sqrt{7} \operatorname{tg} \alpha = 5 \operatorname{tg} \beta$$

$$4 \operatorname{sen} \alpha = 5 \operatorname{sen} \beta$$

Halla $\operatorname{csc} \beta$.

- A) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ D) 2 E) $\sqrt{2}$

10. Cada uno de los lados de un octágono regular mide 2 cm. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región sombreada y la región sin sombreadar?



- A) $\sqrt{2} \text{ cm}^2$ B) 0 cm^2 C) 2 cm^2 D) $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$ E) $(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}^2$

11. En el instante que un avión sobrevuela a 560 km/h la ciudad de Trujillo, un ómnibus, ubicado en el pie de la vertical trazada desde el avión, sale de esta ciudad a 80 km/h en la misma dirección del avión. A las $10 : 20 \text{ a.m.}$ el chofer ve al avión con un ángulo de elevación α , y a las $10 : 26 \text{ a.m.}$ con un ángulo β . Si el avión vuela a altura constante de 6 km , halla

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha$$

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

12. Las longitudes de los lados de un triángulo ABC son $AB = 7$, $BC = 9$ y $AC = 12$. L_1 es la bisectriz interior del ángulo A y L_2 la bisectriz exterior del ángulo C . M y N son los pies de las perpendiculares trazadas desde B a L_1 y L_2 respectivamente. Calcula la longitud de MN .

- A) 2 B) 5 C) 7 D) 8 E) 14

13. Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 20 y 21. Se construye una semicircunferencia que tiene su diámetro sobre el cateto de longitud 20 y es tangente a los otros dos lados del triángulo. Calcula el radio de la semicircunferencia.

- A) 4,2 B) 8,4 C) 2,1 D) 3,5 E) 9,1



Primera Fase - Nivel 3

14. Si multiplicamos todos los números naturales que no son múltiplos de 5 y son menores que 2008, ¿cuál es la cifra de las unidades del producto obtenido?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 7
15. El primer término de una progresión aritmética es $\frac{1}{8}$ y el segundo es $\frac{1}{5}$. Un alumno notó que en esta progresión hay varios términos que son enteros. ¿Cuál es el segundo menor de estos enteros?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
16. En un cuadrado $ABCD$, M y N son puntos de CD y BC respectivamente y Q es un punto del segmento AM . Si el ángulo $\angle NQM$ mide 90° , $QM = 1$, $QN = 2$ y $AM = 4$, calcula la tangente del ángulo $\angle AMD$.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 2 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$
17. Calcula el valor numérico de:
$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)} + \frac{(1+ba)(1+bc)}{(b-a)(c-b)} + \frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(b-c)}$$
cuando $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$.
A) -14 B) $\sqrt{30}$ C) 0 D) 1 E) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$
18. Se tiene 6 números naturales no necesariamente distintos, tales que la suma de dos cualesquiera de ellos es un número compuesto. ¿Cuál es el menor valor impar que puede tomar la suma de estos números?
A) 21 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19
19. Un número natural se denomina *actual* si cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{0, 2, 7\}$ y es múltiplo de 3. Por ejemplo 2007 es actual. ¿Cuántos números actuales son menores que 1000000 ?
A) 162 B) 242 C) 243 D) 728 E) 729
20. En una fila escribimos los números del 1 al 24 inclusive en algún orden, de tal forma que si m divide a n entonces el término de lugar m divide al término de lugar n . ¿De cuántas formas distintas podemos hacer esto?
A) 6 B) 24 C) 1 D) 48 E) 120

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN