Ministerio de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2007)

Sociedad Matemática Peruana

Tercera fase - Nivel 3

06 de noviembre del 2007

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Ingresa tu respuesta en la computadora cada vez que resuelvas un problema y graba tus respuestas. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de la última grabación de tus respuestas.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

EN TODOS LOS CASOS LA RESPUESTA ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Sea ABC un triángulo rectángulo recto en B y de perímetro 70. Si $Tan\,A + Sec\,A = \frac{5}{2}$, halla AB.
2. Un campesino tiene $\overline{aab3}$ nuevos soles. Si compra una vaca se queda con 1500 nuevos soles, pero si compra dos vacas se queda con $\overline{bab}$ nuevos soles. ¿Cuántos nuevos soles cuesta cada vaca?
3. ¿Cuántos números que tienen todas sus cifras pares hay entre 2007 y 7002? (recuerda que el cero es par).
4. Un número natural no es mayor que 90, no es menor que 30, no es cuadrado perfecto, no es par, no es primo, no es divisible por 3 y el dígito de las unidades no es 5. ¿Cuál es ese número?
5. Sea x la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo agudo que cumple

$$Sen(6\,x) = 2\,Sen^2(12\,x) + 1$$

   Halla la suma de todos los posibles valores de x.
6. En un rectángulo $ABCD$ se ubica el punto E en AD de manera que $\angle CED = 3\,\angle BEA$ y $BE - EC = 2\,AB$. Halla $\angle BEC$.

---

7. Sea $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ el conjunto formado por los 2007 primeros números naturales. $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ que tiene las siguientes propiedades

   - La suma de dos elementos cualesquiera de $\mathcal{B}$ nunca es 2008.
   - La diferencia de dos elementos cualesquiera de $\mathcal{B}$ nunca es 2

   ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener $\mathcal{B}$?

8. En un triángulo ABC, ¿Cuál es el menor valor entero que puede tomar

$$\frac{5\,Cot\,C + 4\,Cot\,A + Cot\,B}{Csc\,C}\ ?$$

9. En cada casilla de un tablero de 6×6 se escribe un número real de tal manera que se cumpla la siguiente condición: para cada casilla, la suma de los números escritos en sus casillas vecinas es siempre 1.
   Halla la suma de todos los números escritos en el tablero.
   Nota.- Dos casillas son vecinas si tienen un lado común.

10. Un polinomio $P(x)$ de grado 9 tiene la propiedad

$$P(k) = \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 10$$

   El valor de $P(11)$ puede ser escrito como $-\dfrac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos y el $MCD(m, n) = 1$. Halla $m + n$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN