



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta fase - Nivel 2

29 de noviembre del 2009

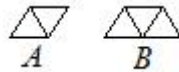
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1. Sean a, b, c y d cuatro números enteros cuya suma es cero. Definimos

$$M = (bc - ad)(ac - bd)(ab - cd)$$

Demuestre que existe un número entero P tal que $P^2 = M$.

Problema 2. Un triángulo equilátero de lado 6 es dividido en 36 triangulitos equiláteros de lado 1. Dicho tablero es cubierto con m fichas del tipo A y n fichas del tipo B , sin superposiciones ni huecos, donde las fichas A están formadas por 2 triangulitos equiláteros de lado 1 y las fichas B por 3 triangulitos, como se muestra en la siguiente figura



Determine todos los valores de m .

Problema 3. Para cada entero positivo n tomamos el mayor divisor d de n tal que $d \leq \sqrt{n}$ y definimos $a_n = \frac{n}{d} - d$. Demuestre que en la sucesión a_1, a_2, a_3, \dots , cualquier entero k no negativo aparece infinitas veces.



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Problema 4. Se marcan N puntos sobre una circunferencia ($N \geq 5$) de modo que los N arcos formados tienen la misma longitud. Se colocan N fichas sobre los N puntos marcados (una ficha por cada punto). Dos jugadores, Ricardo y Tomás juegan retirando las fichas colocadas, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Los turnos de juego son intercalados.
- Empieza Ricardo.
- Si en el turno de un jugador hay tres fichas tales que los correspondientes puntos marcados forman un triángulo no obtusángulo, el jugador debe retirar una de esas fichas.
- Pierde el jugador que no puede retirar ficha alguna en su turno.

¿Algún jugador tiene estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿en qué consiste tal estrategia?