



Ministerio
de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA
(ONEM 2009)



Sociedad Matemática
Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

29 de noviembre del 2009

-
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.
-

Problema 1. Para cada entero positivo n , sea $c(n)$ la cantidad de dígitos de n . Sea A un conjunto de enteros positivos con la siguiente propiedad: Si a y b son dos elementos distintos de A , entonces $c(a+b) + 2 > c(a) + c(b)$. Halle la mayor cantidad de elementos que puede tener A .

Problema 2. En un cuadrilátero $ABCD$, se inscribe una circunferencia que es tangente a los lados AB , BC , CD y DA en los puntos M , N , P y Q , respectivamente. Si $(AM)(CP) = (BN)(DQ)$, pruebe que $ABCD$ es un cuadrilátero inscriptible.

Problema 3.

- Sobre una circunferencia se marcan 8 puntos. Decimos que Juliana hace una “operación T” si escoge tres de dichos puntos y pinta los lados del triángulo que determinan, de modo que cada triángulo pintado tenga a lo más un vértice en común con un triángulo pintado anteriormente. ¿Cuál es la mayor cantidad de “operaciones T” que puede hacer Juliana?
- Si en la parte (a), en vez de considerar 8 puntos se consideran 7 puntos, ¿cuál es la mayor cantidad de “operaciones T” que puede hacer Juliana?

Problema 4. Sea n un entero positivo. Una cuadrícula rectangular de $4 \times n$, es dividida en rectángulos de 2×1 ó 1×2 (como si fuera completamente cubierta con fichas de dominó, sin superposiciones ni huecos). Luego se pintan de rojo todos los puntos de la cuadrícula que son vértices de alguno de los rectángulos de 2×1 ó 1×2 . ¿Cuál es la menor cantidad de puntos rojos que se puede obtener?