Ministerio de Educación

VIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2011)

Sociedad Matemática Peruana

Cuarta Fase - Nivel 3

6 de noviembre de 2011

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1. Decimos que un entero positivo es *irregular* si dicho número no es múltiplo de ninguno de sus dígitos. Por ejemplo, 203 es irregular porque 203 no es múltiplo de 2, no es múltiplo de 0 y no es múltiplo de 3. Considera un conjunto formado por n enteros positivos consecutivos. Si todos los números de ese conjunto son irregulares, determina el mayor valor posible de n.

Problema 2. Si α, β, γ son ángulos cuyas medidas en radianes pertenecen al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tales que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1,$$

calcula el mínimo valor posible de $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en B. Se trazan las bisectrices interiores CM y AN que se intersecan en I. Luego, se construyen los paralelogramos $AMIP$ y $CNIQ$. Si U y V son los puntos medios de los segmentos AC y PQ, respectivamente, demuestra que UV es perpendicular a AC.

Problema 4. Una ficha de *dominó* es una pieza rectangular de 1×2 (ó de 2×1); es decir, formada por dos cuadraditos. Se tiene un tablero de 8×8, tal que cada ficha de dominó puede cubrir exactamente dos de sus casillas. Juan coloca n fichas de dominó sobre el tablero, de manera que cada una cubre exactamente dos cuadraditos del tablero y ya no es posible colocar una ficha más sin que se superponga con alguna de las ya colocadas. Determina el menor valor de n para el cual la situación descrita es posible.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN