Ministerio de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2008)

Sociedad Matemática Peruana

Cuarta fase - Nivel 1

09 de noviembre del 2008

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1.- ¿Cuántos números $\overline{abc}$ de tres dígitos distintos cumplen la siguiente propiedad?

" al reemplazar el dígito mayor por el dígito 1 se obtiene un múltiplo de 30 "

Problema 2.- Se escriben los números naturales desde el 1 hasta el 9 inclusive y luego se pintan usando los colores rojo, azul y verde. Cada número se pinta con un solo color, de tal modo que cada número pintado de rojo es igual a la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde. ¿Cuál es la máxima cantidad de números que se pueden pintar de rojo?

Problema 3.- Decimos que un entero positivo m es *fierito* si existe un número entero positivo N tal que la suma de las cifras de N es m, y además N es divisible por $m + 2008$.

a) Halla un número fierito mayor que 1000.

b) Halla un número fierito menor que 100.

Problema 4.- Andrés y Victor juegan en un tablero de 7×7, escribiendo por turnos 0 ó 1 en alguna casilla desocupada. Andrés inicia el juego. Andrés gana el juego si logra que aparezcan seis números iguales en fila, en columna o en diagonal. Además, Victor tiene la opción de no jugar su turno si así lo desea. Demuestra que Victor tiene una manera de jugar de tal modo que Andrés no le puede ganar.

Ministerio de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2008)

Sociedad Matemática Peruana

Cuarta fase - Nivel 2

09 de noviembre del 2008

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1.- Un profesor de matemáticas escribe el número 1 en la pizarra y le dice a su alumno Gomito:
" Puedes cambiar el número escrito en la pizarra por el número que resulta al multiplicarlo por 2 o por 3 y sumarle 1, y puedes hacer esta operación cuantas veces quieras".
Haciendo solamente estos cambios, sucesivamente,

a) ¿Es posible que Gomito obtenga el número 2008?

b) ¿Es posible que Gomito obtenga el número 2009?

Problema 2.- Iván marca algunos puntos de una recta de tal modo que se cumple la siguiente propiedad:

"Siempre que Iván escoge tres puntos marcados, hay dos de ellos cuya distancia es menor que 3 y hay dos de ellos cuya distancia es mayor que 3".

¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que puede marcar Iván?

Problema 3.- En cada casilla de un tablero de 4×4 se escribe uno de los números 1, 2, 3 ó 4, de tal modo que no haya dos números iguales en la misma fila o en la misma columna. Decimos que un subtablero de 2×2 es *bacán* si contiene a todos los números del 1 al 4. ¿Cuál es el mayor número de subtableros bacanes que puede tener el tablero?

Problema 4.- Sean $\alpha < \beta < \theta$ las raíces reales de la ecuación $3x^3 - 3x + 1 = 0$.
Si

$$M = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\theta} + \frac{\theta}{\alpha}$$
$$N = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\theta}{\beta} + \frac{\alpha}{\theta}$$

Halla $M + N$, MN y $M - N$.

Ministerio de Educación

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2008)

Sociedad Matemática Peruana

Cuarta fase - Nivel 3

09 de noviembre del 2008

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Puedes llevarte la hoja con los enunciados de los problemas.

Problema 1.- Alrededor de una mesa redonda se sientan $2n$ peruanos, $2n$ bolivianos y $2n$ ecuatorianos. Si se pide que se pongan de pie todos los que tienen como vecinos, a su derecha y a su izquierda, a personas de la misma nacionalidad, ¿cuál es el mayor número de personas que se pueden poner de pie?

Problema 2.- Sean a y b números reales para los cuales se cumple:

$a\,csc\,x + b\,cot\,x \geq 1$ para todos los ángulos x tales que $0 < x < 180$, x en grados sexagecimales.

Halla el mínimo valor de $a^2 + b$.

Problema 3.- ABC es un triángulo acutángulo con $\angle ACB = 45°$. Sean D y E puntos de los lados BC y AC, respectivamente, tales que $AB = AD = BE$. Sean M, N y X los puntos medios de BD, AE y AB, respectivamente. Si las rectas AM y BN se cortan en el punto P, demuestra que las rectas XP y DE son perpendiculares.

Problema 4.- Se pintan todos los puntos del plano que tienen ambas coordenadas enteras, usando los colores rojo, verde y amarillo. Si los puntos se pintan de modo que haya por lo menos un punto de cada color, demuestra que siempre existen tres puntos X, Y y Z, de colores distintos, tales que $\angle XYZ = 45°$.