

XV Olimpiada del Cono Sur, 2004

Examen Selectivo, Perú

1. En una lotería especial, al comprar un ticket de lotería, un jugador debe elegir 6 números de 36 posibles. Al momento del sorteo se seleccionan, al azar, 6 números de los 36 disponibles y un ticket es ganador si ninguno de sus números fue seleccionado en el sorteo.
 - a) Probar que es posible comprar 9 tickets de tal manera que al menos uno de ellos será ganador.
 - b) Probar que no es posible comprar 8 tickets de tal manera que al menos uno de ellos será ganador.

2. Dos piratas encontraron un cofre conteniendo monedas de valores

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2003}$$

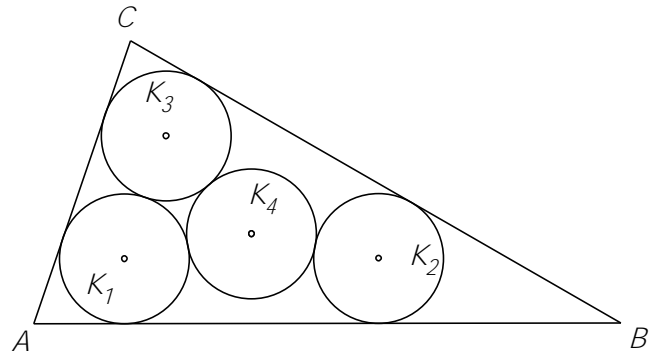
(hay suficiente cantidad de monedas de cada valor). El primer pirata forma todos los posibles conjuntos de monedas de distintos valores que contienen un número impar de monedas, y toma de cada conjunto la moneda de mayor valor. El segundo pirata forma todos los posibles conjuntos de monedas de distintos valores que contienen un número par de monedas y toma de cada conjunto la moneda de mayor valor. ¿Cuál de ellos se lleva mayor cantidad de dinero y cuánto más?

3. Los números reales α y β satisfacen:

$$\begin{aligned}\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 &= 0 \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 &= 0\end{aligned}$$

Encontrar $\alpha + \beta$.

4. En el interior de un triángulo ABC se construyen cuatro circunferencias K_1, K_2, K_3 y K_4 , del mismo radio, tales que K_1, K_2 y K_3 son tangentes a dos lados del triángulo y a K_4 , como se muestra en la figura:



Probar que el centro de K_4 está ubicado sobre la recta que pasa por el incentro y el circuncentro del triángulo.