

# XV Olimpiada del Cono Sur, 2004

## Primer Examen Selectivo, Brasil

1. ¿Es posible, para algún entero positivo  $n$ , escribir los números  $n$ ,  $n^2$  y  $n^3$  utilizando solamente una vez cada uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?
2. El cuadrilátero convexo  $ABCD$  tiene los lados  $AD$  y  $BC$  no paralelos, sean  $M$  y  $P$  sobre los lados  $AB$  y  $CD$  respectivamente, tales que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC}$$

y sea  $Q$  un punto sobre el lado  $AD$ . La paralela a  $MP$  por  $Q$  corta a las paralelas a  $BC$  por  $A$  y  $D$  en los puntos  $X$  y  $Y$  respectivamente. Pruebe que  $MX$ ,  $PY$  y  $BC$  son concurrentes.

3. Encuentre todas las ternas de números reales  $(x, y, z)$  tales que

$$2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + yz + zx.$$

4. Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos mayores que 1. Considere el arreglo rectangular de  $m \times n$  puntos en el plano. Exactamente  $k$  de esos puntos son coloreados de rojo, de tal forma que ningún triángulo rectángulo con sus dos catetos paralelos a los lados del arreglo rectangular posea sus tres vértices pintados de rojo. Determine el mayor valor posible de  $k$ .

## Segundo Examen Selectivo, Brasil

1. Los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  están sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  del triángulo, respectivamente, de modo que los segmentos  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  pasan por un mismo punto  $G$ . Pruebe que si los cuadriláteros  $AFGE$ ,  $BDGF$  y  $CEGD$  son circunscriptibles, y las circunferencias inscritas a esos tres cuadriláteros son tangentes dos a dos entonces el triángulo  $ABC$  es equilátero.
2. Algunas casillas de un tablero rectangular  $m \times n$ ,  $m, n \geq 2$ , son pintadas de blanco. Las demás casillas son pintadas de negro. Al inicio, un escarabajo, viniendo de afuera

del tablero, entra en una casilla del borde del tablero. La casilla a la cual entra el escarabajo se pinta del color opuesto. En cada paso el escarabajo se mueve a una casilla vecina (osea, que tenga un lado en común con la casilla anterior), y la casilla a la cual entra el escarabajo se cambia al color opuesto. Después de un número finito de pasos, el escarabajo, estando en una casilla del borde del tablero, deja el tablero. El escarabajo no necesariamente sale cuando llega por primera a una casilla del borde del tablero. Después de que el escarabajo haya salido del tablero, ¿es posible que todas las casillas del tablero estén pintadas de negro?

3. Sea  $n$  un entero positivo. Pruebe que no existen enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{4n+2}.$$

4. Encuentre todas las permutaciones  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2004}\}$  de  $\{1, 2, \dots, 2004\}$  tales que para todo entero  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2004$ , el número  $2(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$  es divisible por  $i + 1$ .