

XVI Olimpiada del Cono Sur, 2005

Examen Selectivo, Perú

1. Los enteros positivos 1, 2, 3, ..., se escriben en las casillas de la cuadrícula siguiente, uno en cada casilla, de la forma siguiente:

fila n							
...	15						
fila 4	10	14					
fila 3	6	9	13				
fila 2	3	5	8	12			
fila 1	1	2	4	7	11		
	col. 1	col. 2	col. 3	col. 4	col. 5	...	col. m

Encuentre un polinomio $P(x, y)$, tal que para cualesquiera enteros positivos m, n el número escrito en la casilla ubicada en la columna m y fila n sea $P(m, n)$.

2. Sobre veinte puntos en una circunferencia se ubican veinte fichas. Dos jugadores, en forma alternada, retiran tres fichas cualesquiera en cada jugada, hasta que solamente queden dos fichas. Si las dos fichas que quedan eran adyacentes en la ubicación inicial, el jugador que comienza gana; en caso contrario, el otro jugador gana. Analizar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.
3. Sea D el punto medio del lado BC de un triángulo dado ABC . Sean M un punto del lado BC tal que $\angle BAM = \angle DAC$, L el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo CAM con el lado AB y K el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo BAM con el lado AC . Pruebe que KL y BC son paralelos.

4. Sea (a_n) la sucesión definida por $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$, para $n \geq 1$. Pruebe que para cualquier entero positivo n se cumple que:

$$\sum_{k=1}^n a_k < 1.$$

<http://selectivos-peru.blogspot.com>