XVI Olimpiada del Cono Sur, 2005

Primer Examen Selectivo, Brasil

1. Sea P un punto del menor arco AB de la circunferencia circunscrita al cuadrado $ABCD$. Los segmentos AC y PD se intersectan en Q, y AB y PC se intersectan en R. Demuestre que QR es la bisectriz del ángulo $\angle PQB$.

2. Un número entero es escrito en cada una de las casillas de un tablero $n \times n$, $n \geq 3$. Se sabe que la suma de los números de las casillas de cualquier subcuadrado 2×2 y 3×3 es par. Halle todos los valores de n para los cuales la suma de los números de todas las casillas del tablero es necesariamente par.

3. Sean a, b, c, d enteros positivos tales que

$$\begin{aligned} a < b \leq c < d \\ ad = bc \\ \sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1. \end{aligned}$$

   Demuestre que a es un cuadrado perfecto.

4. Dado un polígono convexo con $n \geq 5$ lados, pruebe que existen como máximo $\dfrac{n(2n-5)}{3}$ triángulos de área 1 formados por los vértices del polígono.