

# XVII Olimpiada del Cono Sur, 2006

## Examen Selectivo, Perú

1. Encontrar todos los pares de números enteros positivos tales que el último dígito de su suma es 3, su diferencia es un número primo y su producto es un entero cuadrado perfecto.
2.  $AA_1$  y  $BB_1$  son las alturas de un triángulo acutángulo no isósceles  $ABC$ .  $A_0$  y  $B_0$  son los puntos medios de  $BC$  y  $CA$ , respectivamente. El segmento  $A_1B_1$  corta al segmento  $A_0B_0$  en  $C'$ . Probar que  $CC'$  es perpendicular a la recta que une el ortocentro y circuncentro del triángulo  $ABC$ .
3. El conjunto  $M = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$  se divide en  $k$  subconjuntos de tal manera que si  $a + b = n^2$ , ( $a, b \in M$ ,  $a \neq b$ ,  $n$  es un número entero), entonces  $a$  y  $b$  pertenecen a diferentes subconjuntos. Determinar el menor valor de  $k$ .
4. Todas las casillas de un tablero cuadrado de  $(n + 1) \times (n - 1)$  casillas son pintadas con tres colores de modo que, para cada dos columnas distintas cualesquiera y cada dos filas distintas cualesquiera, las cuatro casillas en sus intersecciones no sean pintadas todas del mismo color. Encontrar el mayor valor posible de  $n$ .