XVII Olimpiada del Cono Sur, 2006

Examen Selectivo, Argentina

Día 1

1. Hallar todos los enteros positivos k tales que el resultado de multiplicar los dígitos de k es igual a
$$\frac{25}{8}k - 211.$$

2. En cada casilla de un tablero de 12×12 hay un 0 ó un 1. La operación permitida es elegir 5 casillas consecutivas en dirección horizontal, vertical o diagonal ($\nearrow$ o $\searrow$) y en esas 5 casillas cambiar cada 0 por 1 y cada 1 por 0. Inicialmente todas las casillas tienen un 0. Determinar si es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, lograr que todas las casillas del tablero tengan un 1.

3. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 120°$. Las bisectrices de los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$ cortan a los respectivos lados opuestos en los puntos D, E, F. Demostrar que el ángulo $\angle EDF$ es recto.

Día 2

4. Hallar el menor número formado exclusivamente por dígitos 3 y 7, con al menos un dígito de cada clase, tal que tanto el número como la suma de sus dígitos sea divisible por 3 y por 7.

5. En el pizarrón están escritos los cuadrados de los primeros 101 números enteros positivos:
$$1^2\ 2^2\ 3^2\ \ldots\ 100^2\ 101^2$$
Hay que escribir delante de cada número un signo “ + ” o un signo “ - ”de manera que al realizar la suma algebraica de los 101 números se obtenga el menor valor mayor o igual que cero que sea posible. Determinar cuál es ese mínimo e indicar como se distribuyen los signos para lograrlo.

6. Sea n un entero positivo. Se considera el tablero de $(n-1) \times (n+1)$, dividido en casillas de 1×1. Hay que colorear el tablero usando 3 colores, cada casilla con un color, de manera que para cada elección de 2 filas y 2 columnas del tablero, las 4 casillas que se

encuentran en la intersección de esas 2 filas y esas 2 columnas no sean todas de un mismo color. Determinar el máximo valor de n para el que es posible lograr una coloración con esta propiedad.