XVIII Olimpiada del Cono Sur, 2007

Examen Selectivo, Perú

1. Dado un cuadrado $ABCD$, sean M, K, L y N puntos sobre los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tales que $\angle MKA = \angle KAL = \angle ALN = 45°$. Pruebe que
$$MK^2 + AL^2 = AK^2 + LN^2.$$

2. Inicialmente se tienen los números 1, 2, 3, 4 escritos alrededor de un círculo (en ese orden). Dos jugadores A y B juegan en forma alternada de la siguiente manera, comenzando el jugador A: A elige dos números vecinos y le suma 1 a ambos, B, a su turno, elige dos números vecinos y los intercambia de lugar. A gana si consigue que todos los números sean iguales. ¿Puede evitar B que A gane?

3. Encuentre todos los enteros positivos n tales que $n + 1$ se pueda expresar como la suma de tres divisores positivos de n distintos entre sí.

4. Pruebe que los números enteros del 1 al 16 pueden ser distribuidos en un tablero de 4×4 , uno en cada casilla, de tal manera que la suma de los números escritos en dos casillas vecinas cualesquiera sea un número primo.
¿Se cumpliría lo mismo si en vez de los números del 1 al 16 se distribuyen los números del 2 al 17?
Nota.- Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

Soluciones

1. ***Solución 1.***
Sea E el simétrico de B con respecto a AK, tenemos que $AB = AE$ y $\angle BAK = \angle KAE$. Notamos además que $\angle EAL = \angle LAN$, y como $AD = AB = AE$, los triángulos EAL y LAD son congruentes, luego $\angle LEA = 90^o$, con lo que deducimos que los puntos K, E y L son colineales.

Sea P un punto en AE tal que $\angle AKP = 45^o$, tenemos que los triángulos AMK y APK son congruentes, por lo tanto $MK = PK$, además como $\angle AKP + \angle KAL = 90^o$ tenemos que KP es perpendicular a AL. Por otro lado, como AP es perpendicular a KL, tenemos que P es ortocentro del triángulo AKL, luego LP es perpendicular a AK y $\angle PLA = 45^o$. Ahora tenemos que los triángulos PLA y NLA son congruentes, luego $PL = LN$.

Del Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} AK^2 - PK^2 &= AE^2 - PE^2 \\ AL^2 - PL^2 &= AE^2 - PE^2 \end{aligned}$$

finalmente como $PK = MK$ y $PL = LN$ tenemos:

$$AK^2 - PK^2 = AL^2 - PL^2 \Longleftrightarrow AK^2 - MK^2 = AL^2 - NL^2$$

que es lo queríamos demostrar.

Solución 2.
Sean $AB = l$, $BM = m$ y $ND = n$. Aplicando la ley de Euclides en los triángulos AMK y ALN tenemos:

$$\begin{aligned} AK^2 &= AM^2 + MK^2 + 2AM.MB \\ AL^2 &= AN^2 + LN^2 + 2AN.ND \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} MK^2 + AL^2 &= AK^2 + LN^2 \\ \Longleftrightarrow \quad AK^2 - MK^2 &= AL^2 - AN^2 \\ \Longleftrightarrow \quad AM^2 + 2AM.MB &= AN^2 + 2AN.ND \\ \Longleftrightarrow (l-m)^2 + 2(l-m)m &= (l-n)^2 + 2(l-n)n \ldots (1) \end{aligned}$$

Si llamamos $\alpha = \angle BKM$, entonces $\angle LAN = \alpha$ y además:

$$\begin{aligned} BK = l.tg(45^o - \alpha) &\Longrightarrow m = BM = BK.tg\ \alpha = l.tg(45^o - \alpha).tg\ \alpha \\ LD = l.tg\ \alpha &\Longrightarrow n = ND = LD.tg(45^o - \alpha) = l.tg\ \alpha.tg(45^o - \alpha) \end{aligned}$$

Luego $m = n$ y por tanto (1) es cierto.

2. Demostraremos que B puede evitar que A gane.

   Si denotamos con P a un número par y con I a un número impar, al inicio tenemos:

$$\begin{matrix} P & I \\ I & P \end{matrix} \qquad (1)$$

   luego de que A juegue quedarían dos P's juntos seguidos de dos I's juntos, considerando las posibles rotaciones, la nueva distribución sería:

$$\begin{matrix} P & I \\ P & I \end{matrix} \qquad (2)$$

   La estrategia de B es la siguiente: B intercambia un P con un I:

$$\begin{matrix} P & I \\ I & P \end{matrix} \qquad (3) = (1)$$

   de esta forma A recibe dos P's opuestos diametralmente y luego de hacer su jugada quedaría nuevamente (2) (o alguna de sus rotaciones), y de esta forma B puede repetir su estrategia indefinidamente.

   Notemos que B consigue que A siempre deje dos P's y dos I's luego de realizar su jugada, es decir nunca puede dejar cuatro números iguales.

3. Sean $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{b}$ y $\frac{n}{c}$ los divisores de n, con $a < b < c$, tales que

$$n + 1 = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} \qquad (1)$$

   Demostraremos primero que $a < 3$, para esto, procederemos por contradicción.
   Supongamos que $a \geq 3$ entonces $b \geq 4$ y $c \geq 5$, luego:

$$n + 1 \leq \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{47n}{60} < n$$

   que claramente es falso. Por lo tanto $a < 3$.

   Si $a = 1$, luego de reemplazar en la ecuación (1), tenemos $1 = \frac{n}{b} + \frac{n}{c}$, que es falso, pues al menos uno de los números $\frac{n}{b}$ o $\frac{n}{c}$ debe ser mayor que 1. Deducimos que $a = 2$, luego, reemplazando el valor de a en (1) tenemos:

$$\frac{n+2}{2} = \frac{n}{b} + \frac{n}{c} \qquad (2)$$

Demostraremos ahora que $b < 4$, también por contradicción, si $b \geq 4$ entonces $c \geq 5$ luego:

$$\frac{n+2}{2} \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{9n}{20} < \frac{n}{2}$$

que es falso. Por lo tanto $b < 4$ y como $2 = a < b$ entonces $b = 3$, además, de la ecuación (2):

$$\frac{n+6}{6} = \frac{n+2}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{c}$$

luego

$$c = \frac{6n}{n+6} = \frac{(6n+36) - 36}{n+6} = 6 - \frac{36}{n+6}$$

pero sabíamos que $c > b = 3$, luego $\dfrac{36}{n+6}$ puede ser 1 o 2, es decir, $n = 30$ o $n = 12$, en ambos casos obtenemos solución al problema:

$$12 + 1 = \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4}$$
$$30 + 1 = \frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \frac{30}{5}$$

4. Primera parte:

Si dos números vecinos tienen la misma paridad, entonces su suma es compuesta, ya que es par mayor o igual que 3. Luego, dos números vecinos deben tener distinta paridad, esto significa que si el tablero es pintado como en un tablero de ajedrez, los pares van en las casillas negras y los impares en las blancas (o viceversa). Es posible demostrar que siempre existen dos números vecinos cuya suma es múltiplo de 3, por eso haremos que ese múltiplo de 3 venga de la suma 1 + 2, que es primo; siguiendo esto es fácil encontrar una de las maneras de completar el tablero, por ejemplo:

8	11	6	13
5	12	7	16
2	1	10	3
15	4	9	14

Segunda parte:

Bastaría demostrar que siempre existen dos números vecinos cuya suma es múltiplo de 3, ya que la suma de dos números vecinos es como mínimo 2 + 3 = 5, con lo cual dicho múltiplo de 3 debe ser compuesto, con lo cual no sería posible la distribución.

Los pares en módulo 3 nos dan los siguientes restos: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2; y los impares en módulo 3 nos dan los siguientes restos: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2.

Luego, supongamos que existe una manera de colocar los números de tal modo que no haya dos casillas vecinas cuyos números sumen múltiplo de 3, es decir, que no existan dos números vecinos formando las parejas 0 - 0, 1 - 2 ó 2 - 1, si son escritos los restos en módulo 3 en vez de los números. Entonces se cumple que:

(*) Cada casilla no puede estar rodeada por los números 0, 1 y 2 al mismo tiempo, ya que el número escrito en ella con alguno de los números 0, 1 ó 2 sumará múltiplo de 3 inevitablemente.

Coloquemos los pares en las casillas "negras"(correspondiente a la casilla superior izquierda).

Si las dos casillas negras centrales tienen escrito el mismo número "X", entonces sólo se presentan los siguientes casos (Según X se repita 2 ó 3 veces):

C		D	
	X		E
B		X	
	A		X

,

B		C	
	X		D
A		X	
	X		E

,

C		D	
	X		E
B		X	
	A		F

en donde, cada número A, B, C, D y E es distinto de X, entonces según (*), A y B, B y C, C y D, D y E, tienen que ser iguales, entonces A, B, C, D y E son iguales, esto es una contradicción, pues ningún resto se repite 5 veces.

Entonces las dos casillas negras centrales tienen distintos números, supongamos que "X" e "Y":

C		D	
	X		E
B		Y	
	A		F

En este caso, por (*), los números A, B, D y E no pueden ser distintos de X e Y, entonces los números C y F tienen que ser iguales al número restante "Z", que debe aparecer exactamente dos veces, es decir Z = 0. Además B = D = X y A = E = Y, con esto, la distribución debe ser hecha del siguiente modo:

0		1	
	1		2
1		2	
	2		0

Luego, podemos hallar los números restantes: el número escrito en cada casilla blanca es, según (*), 0 si está rodeado por 1 y 2, 1 si está rodeado por 1 y 0, 2 si está rodeado por 0 y 2. Entonces la distribución final es:

0	1	1	0
1	1	0	2
1	0	2	2
0	2	2	0

la cual es imposible ya que, entre los impares, hay 3 restos 0 y no 2, contradicción. Por lo tanto la segunda distribución es imposible.

John Cuya
Claudio Espinoza
Jorge Tipe

`http://selectivos-peru.blogspot.com`