

# XVIII Olimpiada del Cono Sur, 2007

## Primer Examen Selectivo, Brasil

1. Halle todos los pares de números reales  $(a, b)$  tales que

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a + 1)(b + 1)(ab + 1).$$

2. Dado un natural  $n$ , sea  $S(n)$  la suma de sus dígitos. ¿Existe algún número natural  $n$  para el cual ninguno de los números

$$S(n), S(2n), S(3n), \dots$$

sea un múltiplo de 2007 ?

3. Sea  $ABC$  un triángulo y  $P$  un punto sobre la mediana del lado  $BC$ . Sean también  $D$  la intersección de  $AC$  y  $BP$ , y  $E$  la intersección de  $AB$  y  $CP$ . Si los inradios de los triángulos  $BEP$  y  $CDP$  son iguales, pruebe que  $AB = AC$ .

4. Pruebe que existe un conjunto  $S$  de  $3^{1000}$  puntos en el plano tal que, para cada punto  $P$  de  $S$ , existen por lo menos 2000 puntos en  $S$  cuya distancia a  $P$  es exactamente una unidad.

## Segundo Examen Selectivo, Brasil

1. Sean  $a, b, c, x, y, z$  números reales distintos tales que  $ax + by + cz = 0$ . Pruebe que

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

no depende de  $x$ , ni de  $y$ , ni de  $z$ .

2. a) ¿Es posible particionar el conjunto de los números enteros en tres subconjuntos tales que si  $a$  y  $b$  son dos números de conjuntos diferentes entonces  $2(a + b)$  pertenece al tercer conjunto?
- b) ¿Es posible particionar el conjunto de los números racionales en tres subconjuntos tales que si  $a$  y  $b$  son dos números de conjuntos diferentes entonces  $2(a + b)$  pertenece al tercer conjunto?

*Observación:* particionar un conjunto  $A$  en tres subconjuntos es encontrar tres subconjuntos cuya unión es  $A$  y tales que la intersección entre cualesquiera dos de ellos es vacía.

3. Encuentre todas las cuaternas  $(x, y, z, k)$  de números enteros, con  $x, y, z > 0$  y  $k \geq 0$ , tales que

$$x^6 + y^6 + z^6 = 4826 \cdot 7^k.$$

4. Sean  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  las alturas del triángulo acutángulo  $ABC$ , con  $D$  sobre  $BC$ ,  $E$  sobre  $CA$  y  $F$  sobre  $AB$ . Sea  $M$  el punto medio de  $AC$ . Se sabe que  $AB > BC$ . Siendo  $K$  la intersección de  $BM$  y  $AD$ , el punto  $T$  es la intersección de  $BC$  con la recta paralela a  $AC$  que pasa por  $K$ . Además,  $H$  es el ortocentro de  $ABC$ . Pruebe que las rectas  $DF$ ,  $HT$  y  $AC$  son concurrentes.

### Tercer Examen Selectivo, Brasil

1. Considere la secuencia

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}, \quad n \geq 1$$

Pruebe que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$$

es un entero.

2. El conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$  es particionado en 50 subconjuntos. Muestre que por lo menos uno de esos subconjuntos contiene tres números distintos que representan las longitudes de los lados de un triángulo.
3. Construya un triángulo  $ABC$  de incentro  $I$  y ortocentro  $H$ , conociendo las medidas del inradio  $r$  y de los segmentos  $AI$  y  $AH$ .
4. Halle todos los enteros positivos  $n$  para los cuales el conjunto

$$\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$$

puede ser particionado en 12 subconjuntos de modo que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma.