XX Olimpiada del Cono Sur, 2009

Primer Examen Selectivo, Perú

1. Decimos que una sucesión formada por enteros positivos es *olímpica* si cumple las siguientes dos condiciones:

- Cada entero positivo aparece exactamente una vez en la sucesión.
- Siempre que se suman tres términos consecutivos de la sucesión se obtiene un número que no es un cuadrado perfecto.

Pruebe que existe una sucesión olímpica cuyo primer término es 2009.

(Jorge Tipe)

2. Considere una región poligonal regular de n lados ($n \geq 3$). Pruebe que es posible dividir dicha región en n regiones poligonales de igual área, de tal forma que cada una de ellas tenga n lados.

Aclaración: Las regiones poligonales no son necesariamente convexas.

(Jorge Tipe)

3. En la pizarra están escritos los números

$$00, 01, 02, 03, 04, \ldots, 96, 97, 98, 99$$

y se eliminan algunos de ellos por etapas. En cada etapa se eliminan exactamente 4 números de la forma

$$\overline{a(b-1)},\ \overline{a(b+1)},\ \overline{(a+1)b},\ \overline{(a-1)b}$$

que no hayan sido eliminados antes, tales que $1 \leq a \leq 8$ y $1 \leq b \leq 8$. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que pueden quedar escritos en la pizarra, luego de algunas etapas?

(Israel Díaz)

Segundo Examen Selectivo, Perú

1. Para cada número natural k, sea $S(k)$ la suma de las cifras de k en el sistema decimal, por ejemplo, $S(2009) = 2 + 0 + 0 + 9 = 11$. Halle todos los números naturales n para los cuales existen cuatro números naturales $a < b < c < d$, tales que

$$S(a) = S(b) = S(c) = S(d) = S(a + b + c + d) = n.$$

(Jorge Tipe)

2. Sea ABC un triángulo acutángulo, se ubican los puntos D y E en los segmentos BC y AD, repectivamente, de tal forma que

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Sea F el pie de la perpendicular trazada desde D a la recta BE. Suponga que F pertenece al segmento BE y que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico. Pruebe que E pertenece a alguna de las alturas del triángulo ABC.

(Jorge Tipe)

3. Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{10}$ puntos en el espacio, algunos de ellos están unidos por segmentos que no se intersectan. Un escarabajo que está en el punto P_1 se puede trasladar al punto P_{10} pasando por algunos de los segmentos.

Pruebe que al menos una de las dos siguientes proposiciones es verdadera:

i) El escarabajo puede ir de P_1 a P_{10} pasando como máximo por dos puntos del conjunto $\{P_2, P_3, \ldots, P_9\}$.

ii) Existen dos puntos P_i y P_j $(2 \leq i < j \leq 9)$ tales que cualquier camino del escarabajo que une P_1 con P_{10} pasa por el punto P_i o por el punto P_j.

Aclaración. El escarabajo se mueve solamente sobre los segmentos.

(V. Yasinskyy - Ucrania)

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

`http://selectivos-peru.blogspot.com`