XVIII Olimpiada del Cono Sur, 2009

Examen Selectivo, Argentina

Día 1

1. En una isla viven 200 personas: 100 sinceros, que siempre dicen la verdad, 100 mentirosos, que siempre mienten. Cada una tiene por lo menos una persona amiga en la isla. Cierto día, 100 personas afirmaron, cada una, “todos mis amigos son sinceros” y las otras 100 personas afirmaron, cada una, “todos mis amigos son mentirosos” . Si se forman todos los pares de amigos integrados por una persona sincera y la otra mentirosa, determinar la menor cantidad de estos pares que puede haber.

   Aclaración. Si A es amigo de B, entonces B es amigo de A. Cada persona puede integrar más de un par.

2. Sean p, q y r tres números primos tales que $p < q < r$. Si $2p^2 - r^2 \geq 49$ y $2q^2 - r^2 \leq 193$, hallar los posibles valores de p, q y r.

3. Determinar si es posible cubrir un cuadrado de lado 2,1 con 7 cuadrados de lado 1. (Los cuadrados de lado 1 se pueden girar y superponerse.)

Día 2

4. Freddy escribió en cada casilla de un tablero de 10×10 un número entero del 1 al 10 inclusive, de modo que los números de casillas adyacentes (con un lado o un vértice común) son coprimos. Demostrar que hay un número que se repite al menos 17 veces.

   Aclaración. Dos números son coprimos si su máximo común divisor es 1.

5. Sea $ABCD$ un cuadrado y E un punto del lado BC. El segmento AE corta a la diagonal BD en G. Sea F en el lado CD tal que FG es perpendicular a AE, y sea K en FG tal que $AK = FE$. Calcular la medida del ángulo $\angle FKE$.

6. Sea m un entero positivo y U el número formado por m dígitos 1: $U = 11\ldots1$ (m veces). Si A es un múltiplo de U, determinar el menor valor que puede tener la suma de los dígitos de A.