

XX Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 2005

Examen Selectivo, Perú

1. Probar que no todas las raíces del polinomio

$$P(x) = x^n - 5x^{n-1} + 12x^{n-2} - 15x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \dots + a_0$$

pueden ser reales y positivas.

2. m monedas se encuentran distribuidas en los n vértices de un n -ágono regular ($m > n$). Se mueven las monedas entre los vértices de tal manera que en cada movimiento, dos monedas que se encuentran en el mismo vértice V se mueven a los vértices adyacentes a V , una a cada vértice. Probar que si después de cierto número de movimientos la cantidad de monedas en cada vértice es la misma que había en dicho vértice antes de realizar los movimientos, entonces la cantidad de movimientos es múltiplo de n .

3. En el interior de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ se elige un punto P tal que

$$\angle BPC = \angle BAP + \angle PDC.$$

Denotamos con E , F y G los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto P a las rectas AB , AD y DC , respectivamente. Probar que los triángulos FEG y PBC son semejantes.

4. Encontrar todos los pares de números enteros positivos a , b , $a > b$, tales que

$$(a - b)^{a \cdot b} = a^b \cdot b^a$$