

XLIX Olimpiada Internacional de Matemática, 2008

Primer Examen Selectivo, Perú

1. En el triángulo ABC , sea I el centro de la circunferencia inscrita y sea I_A el centro de la circunferencia ex-inscrita opuesta al vértice A . Sea L_A la recta que pasa por los ortocentros de los triángulos BIC y BI_AC . Se definen de forma análoga las rectas L_B y L_C . Pruebe que las rectas L_A, L_B, L_C pasan por un mismo punto.

Sergey Berlov (Rusia)

2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación:

$$f(2f(x) + y) = f(f(x) - f(y)) + 2y + x,$$

para cualesquiera números reales x, y .

Jonathan Farfán

3. Dado cualquier número natural n , consideremos la secuencia (a_i) , $1 \leq i \leq 2n$, definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= -k, & 1 \leq k \leq n \\ a_{2k} &= n - k + 1, & 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Decimos que el par (b, c) es *bueno* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $1 \leq b < c \leq 2n$,

ii) $\sum_{j=b}^c a_j = 0$

Si $B(n)$ es el número de pares buenos correspondientes a n , demuestre que existen infinitos n para los cuales $B(n) = n$.

Jorge Típe

Segundo Examen Selectivo, Perú

1. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 circunferencias no concéntricas tales que \mathcal{S}_1 está en el interior de \mathcal{S}_2 . Sea K un punto variable de \mathcal{S}_1 . La recta tangente a \mathcal{S}_1 en el punto K corta a \mathcal{S}_2 en los puntos A y B . Sea M el punto medio del arco AB que está en el semiplano determinado por AB que no contiene a \mathcal{S}_1 . Encontrar el lugar geométrico del punto simétrico de M respecto a K .

John Cuya

2. Cuando cortamos una cuerda en dos partes, decimos que el corte es *especial* si las dos partes obtenidas tienen longitudes distintas. Cortamos una cuerda, de 2008 de longitud, en dos partes de longitudes enteras y escribimos estos dos enteros en la pizarra. Luego cortamos una de las partes en dos partes de longitudes enteras y escribimos estos dos enteros en la pizarra. El proceso termina cuando todas las partes tienen 1 de longitud.
 - a) Halle el mínimo número posible de cortes especiales.
 - b) Pruebe que, para todos los procesos que tienen el mínimo número posible de cortes especiales, la cantidad de enteros distintos en la pizarra es siempre la misma.

Alexander Ivanov, Emil Kolev (Bulgaria)

3. Para cada entero positivo n , sea $d(n)$ el número de divisores positivos de n . Decimos que un entero positivo es *feliz* si se puede expresar en la forma $\frac{a^2b}{a-b}$, donde $a > b > 0$ son enteros. Además, decimos que un entero positivo m es *malvado* si no existe un entero feliz n tal que $d(n) = m$. Demuestre que todo entero feliz y malvado es una potencia de 4.

Jorge Típe

<http://selectivos-peru.blogspot.com>