

فصل یازدهم

صورت‌های مبهم و انتگرال

های ناسره

تمرین صفحه ۵۱۹ .

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\operatorname{tg}^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1$$

$$2) \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin^2 t}{t-p} = \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin 2t}{1} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos 3x}{p-2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sec^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos 2x}{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x} = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x(2 \operatorname{tg}^{-1} x - p) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{tg}^{-1} x - p}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{-x^2}} = -2$$

$$6) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t e^{at}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - 1}{t e^{at}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a e^{at}}{e^{at} + a t e^{at}} = a$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{csc} x)^{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sin^2 x \operatorname{Ln} x} = e^0 = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin t - \sin 3t}{3 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 3t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos t - 3 \cos 3t}{3 \sec^2 t - 3 \sec^2 3t}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin t + 3 \sin 3t}{2 \sec^2 t \operatorname{tg} t - 6 \sec^2 3t \operatorname{tg} 3t} = -\frac{8}{16}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(e x) - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln e + \ln x - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{p \cos p x} = \frac{-1}{p}$$

$$11) \quad \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\ln \sin r}{\cos r} = \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cot r}{-\sin r} = 0$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}} = 1$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$14) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos 2t}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{-2t \sin 2t}{2t}} = e^{-2}$$

مشروط بر اینکه f دو بار مشتق پذیر باشد . ۱۵

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

پذیر باشد .

(حل)

$$\text{حد} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - 2f''(x) + f''(x-h)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \frac{1-x^n}{1-x} - n}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^n - 1) - n(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^n - 1 - n}{2(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{1-x + L \circ g x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x L n x} - x}{1-x - L \circ g x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1+L n x) e^{x L n x} - 1}{-1 + \frac{1}{L n 1} \cdot \frac{1}{x}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 2x - 2 \sin^{-1} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times (-\frac{1}{2})(-8x) - 2 \times (-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x - 2x}{6x} \\
 &= \frac{8-2}{6} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(a t g^{-1} \frac{\sqrt{x}}{a} - b t g^{-1} \frac{\sqrt{x}}{b} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}{3x} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x+a}}} = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{2a}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}}$$

۲. ثابت های a و b را طوری تعیین کنید که :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$$

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b - \cos x} = 1 \Rightarrow b = 1, a = 4$$

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. تابع f در بازه $[-1, 1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 f(x) dx$ را تعیین کنید.

(حل) انتگرال ناسره نوع دوم است و مقدار آن برابر زیر است

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ همگراست، اگر $p > 1$

باشد

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

اگر $p > 1$ ، توان x در صورت منفی است پس در این حالت

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p}$$

۳. مقداری برای n پیدا کنید که به ازای آن انتگرال

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$
 همگرا باشد.

به ازای مقدار n بدست آمده انتگرال را حساب کنید.

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln(t+1)^n - \frac{3}{4} \ln(2t^2+n) \right) - A$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{\frac{3}{4}}} - A$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow n = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$I = \ln \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \ln \frac{\sqrt{8}}{\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

(۴) نوع انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ را تعیین کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

(۵) نوع انتگرال $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x dx$ را تعیین کنید.

$$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} \int_{\frac{p}{4}}^t \sec x dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} \ln |\sec t + \tan t| - A$$

$$t \rightarrow \frac{p}{2}^- \quad t \rightarrow \frac{p}{2}^-$$

$$= +\infty$$

انتگرال واگراست.

۶. به ازای مقادیر مختلف n نوع انتگرال های زیر را بررسی کنید:

(الف) $I = \int_0^1 x^n dx$ برای $n > -1$ همگرا و برای $n \leq -1$ واگراست.

$$I = \int_0^1 x^n \ln^2 x \, dx \quad (\text{ب})$$

۷. نوع انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ و اگر راست چون $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ و می

دانیم $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ و اگر راست.

ب) $\int_0^1 \frac{dx}{x \cos x}$ و اگر راست چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{\frac{1}{x}} = 1$ و $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

و اگر راست، طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال داده شده و اگر راست.

ج) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln x}$ ، همگراست، زیرا داریم: $\frac{1}{x^2 + \ln x} \leq \frac{1}{x^2}$ و

انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

د) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

برای $0 < x < 1$ داریم $x^3 < x^2$ پس $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اما انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه

انتگرال داده شده همگراست.

ه) $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x^{\frac{p}{2}}}$ همگراست، چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ اما انتگرال

همگراست، پس انتگرال داده شده همگراست. $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

و) $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ و اگر است. چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{x}} = 1$ اما انتگرال

و اگر است، پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{x}$ و اگر است.

۸. فرض کنید $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، در این صورت ثابت کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{p}$ (ب) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{4}$ (حل)

$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p}$

ب) از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-x^2} dx = \left. \frac{-x}{2} e^{-x^2} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{4}$$

۹. تابعی نظیر f طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ واگرا ولی

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx = 0$

حل) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ را در نظر بگیرید.

۱۰. ثابت کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^t dx$ به ازای هر t حقیقی همگراست.

حل) چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^t e^{-x}}{e^{-2x}} = 0$ و انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-2x} dx$ همگراست. پس

انتگرال داده شده همگراست.

۱۱. تابع گاما. $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt$ تابع گاما است.

ثابت کنید.

(الف) تابع $\Gamma(s)$ به ازای هر $s > 0$ همگراست.

(حل) با توجه به تمرین ۱۰ این تابع برای هر s همگراست.

(ب) نشان دهید $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + \Gamma(x)$$

(ج) $\Gamma(n+1) = n!$

(حل) طبق قسمت ب داریم:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

(د) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، نشان دهید

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2} , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{p}}{2} \quad (\text{حل})$$

تساوی اخیر از تمرین ۸ بدست می آید.

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

۱۲. نوع انتگرال های زیر را معلوم کنید.

(الف) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx$ این انتگرال واگراست چون $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$

طبق آزمون مقایسه چون انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست، انتگرال بزرگتر واگراست.

(ب) $\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} dx$ انتگرال همگراست چون $\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{x^3}$

و انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ همگراست. طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.