بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

فیزیک پایه 1

(مکانیک)

تالیف : هریس بنسون

ترجمه : محمدرضا بهاری

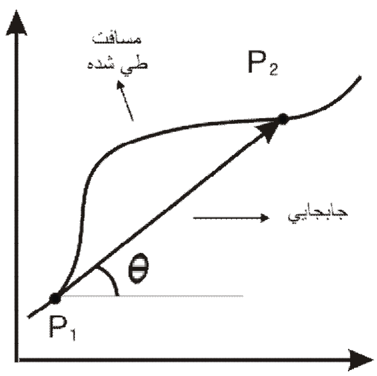
ناشر : انتشارات دانشگاه پیام نور

گردآوری : واحد آموزشی انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ و تدوین : واحد فناوری انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل دوم : بردارها

به کمیتهای عددی (کمیتهایی که وابسته به جهت نیستند) **اسکالر** گفته می شود. مثال: زمان، دما، چگالی و ... .
به کمیتهایی که علاوه بر مقدار به جهت نیز نیاز دارند کمیتهای **برداری** می گویند. مثل نیرو.
اسکالرها از قواعد جبر معمولی تبعیت می کنند اما بردارها از قواعد خاصی پیروی می کنند که به مجموعه آنها **جبر برداری** می گویند.
مسافت نمونه ای از کمیتهای اسکالر است و به مسیر طی شده بستگی دارد اما جابجایی نمونه ای از کمیتهای برداری است و به مسیر و مسافت بستگی ندارد.



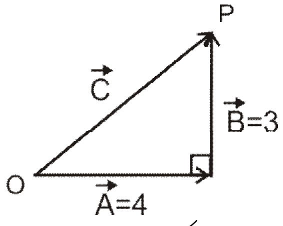
کمیتهای برداری را به همراه پیکانی در بالای نام آنها نمایش می دهیم. $\vec{A}$ نماد یک کمیت برداری است.
اندازه بردار $\vec{A}$ اسکالر مثبتی است که به صورت $|\vec{A}|$ یا به سادگی با A نمایش می دهند.
در نمایش هندسی یا نموداری هر بردار بصورت یک پاره خط جهت دار است که طول آن متناسب با اندازه بردار می باشد و می تواند در هر مکانی نسبت به مبدا دستگاه مختصات قرار داشته باشد.

نکته:

1) از آنجا که بردار دارای اندازه و جهت است هر کدام از این دو تغییر کند دیگر بردار قبلی نخواهد بود.
2) هیچگاه یک اسکالر برابر با یک بردار $(A=\vec{B})$ نمی شود و هیچگاه نمی توان یک اسکالر را با بردار جمع $(A+\vec{B})$ کرد و کاملا بی معنی است.
3) بردارها را میتوان در یک عدد خالص یا اسکالر ضرب نمود و اگر در عددی منفی ضرب شود جهت آن عوض می شود.

جمع بردارها

اندازه بردار برآیند $\Longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\theta}$



برای روشن شدن مفهوم جمع دو بردار، دو بردار جابجایی را با هم جمع می کنیم. مطابق شکل بالا شخصی از نقطه **O**، 4 متر به سمت شرق و بعد 3 متر به طرف شمال می رود.جابجایی اول را با $\vec{A}$ و جابجایی دوم را با $\vec{B}$ نشان می دهیم.

در این جابجایی شخص از نقطه **O** به **P** منتقل شده است که جابجایی خالص نام دارد و آن را با $\vec{C}$ نمایش و به $(\vec{C})$ جمع برداری یا برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می گویند.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

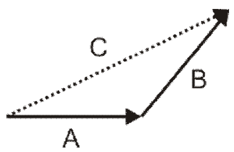
نکته: توجه کنید که معادله بالا یک معادله برداری است و طبق فرمول بالا یا قضیه فیثاغورث $(C = \sqrt{A^2 + B^2})$ اندازه $\vec{C}$ برابر با 5 است و چنانچه مشاهده می شود برآیند دو بردار با مجموع اندازه آنها برابر نیست.

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| \neq A + B$$

$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = A + B \Leftrightarrow$ دو بردار موازی و هم جهت باشند

نکته: جمع و تفریق دو بردار یک بردار است و نه یک عدد.

روش نموداری جمع دو بردار: ابتدا یکی از بردارها را رسم می کنیم و سپس بردار دیگر را به صورتی رسم می کنیم که دم بردار دوم بر سر بردار اول منطبق باشد. حال از دم بردار اول به سر بردار دوم رسم می کنیم تا بردار برآیند به دست آید.



خواص جمع بردارها:

1) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ جابجایی پذیری

2) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ انجمن پذیری

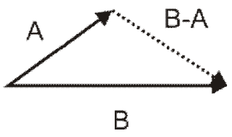
تفریق بردارها

اندازه تفریق دو بردار $\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$

تفریق دو بردار حالت خاصی از جمع دو بردار است.

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

روش رسم: ابتدا دو بردار را از یک مبدا رسم می کنیم و در این صورت تفاضل دو بردار $(\vec{A}-\vec{B})$، برداری است که انتهای $\vec{B}$ را به انتهای $\vec{A}$ وصل می کند.

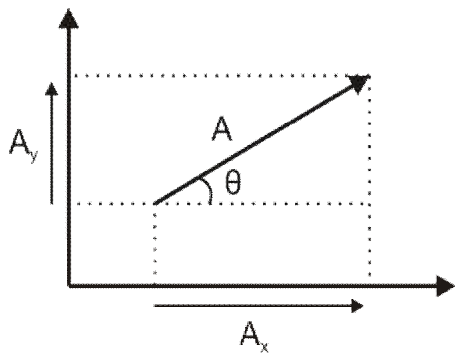


نکته:

$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$

مؤلفه های بردار یکه

روش نموداری برای جمع بردارها روشی وقت گیر و غیر دقیق است و در سه بعد به این سادگی نمی باشد. برداری مثل $\vec{A}$ را می توان به جای مشخص کردن با اندازه و جهت (q, A)، با مولفه هایش (13/10/2007) نشان داد.



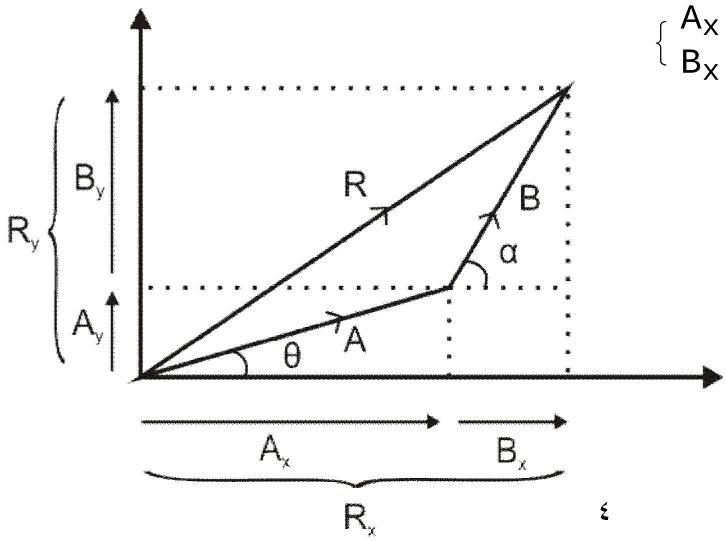
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \end{cases}$$

یکی از مزیت های روش تحلیلی کار کردن با مؤلفه ها در آسانتر و دقیق کردن جمع بردارهاست.

مثال: برای این که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با هم جمع کنیم به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ B_x = B\cos\alpha \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} A_y = A\sin\theta \\ B_y = B\sin\alpha \end{cases}$$



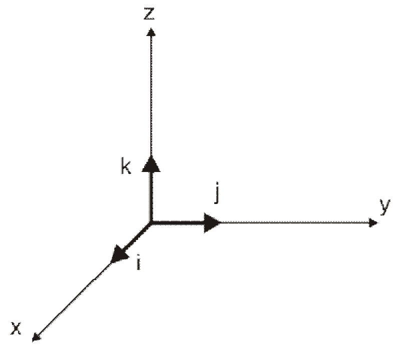
$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

بردارهای یکه

برای ساده تر کردن عملیات مربوط به بردارها معمولا از سه بردار یکه $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ که به ترتیب با محورهای x، y و z موازی اند استفاده می کنیم. بردار یکه کمیت بدون بعدی است که فقط برای مشخص کردن جهت در فضا به کار می رود.

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$



به طور کلی هر بردار را می توان به صورت حاصل جمع سه بردار که هر یک موازی با یکی از محورهای مختصات است بیان کرد.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

و اندازه آن بصورت $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ بدست می آید.

نکته: اگر دو بردار با هم برابر باشند مؤلفه های نظیر به نظیر آنها با هم برابرند.

$$\vec{A} = \vec{B} \rightarrow = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$
$$\rightarrow A_x = B_x,\ A_y = B_y,\ B_z = B_z$$

بنابراین:

ضرب اسکالر

نتیجه حاصل از این ضرب یک عدد یا اسکالر است.

1) $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

2) $\vec{A}.\vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) . (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$

$\longrightarrow A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow$ یک عدد می باشد

خواص ضرب اسکالر:

1) جابجایی پذیری $\vec{B}.\vec{A} = \vec{A}.\vec{B}$

2) توزیع پذیری $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

3) اگر θ صفر درجه باشد آنگاه $\vec{A}.\vec{B} = AB \Longrightarrow \vec{A}.\vec{A} = A^2$

4) اگر θ برابر 90 درجه باشد آنگاه $\vec{A}.\vec{B} = 0$

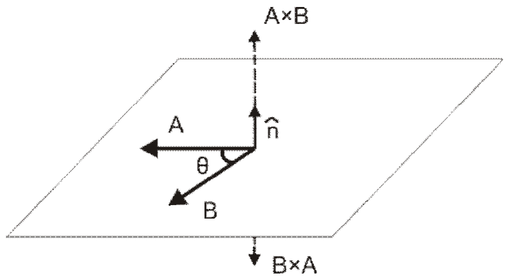
نکته: زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\ \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

ضرب برداری:

ضرب برداری (یا چلیپایی) $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به صورت $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$ که θ برابر زاویه کوچکتر میان بردارها می باشد.



حاصلضرب برداری یک بردار است.

نکته: بردار حاصلضرب برداری بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.

خواص ضرب برداری

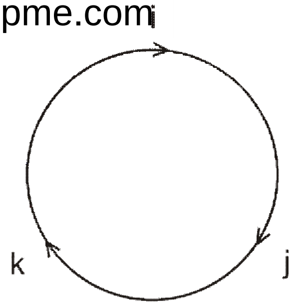
1) $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ جابجایی پذیرنیست

2) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

3) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{C}$

4) $\vec{A}\times\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\ \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\ \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\ \hat{k}$

نکته: $\vec{A} \times \vec{A} = 0$



$i \times i = 0$	$j \times i = -k$	$i \times j = k$
$j \times j = 0$	$k \times j = -i$	$j \times k = i$
$k \times k = 0$	$i \times k = -j$	$k \times i = j$

ضرب برداری را بوسیله دترمینان خیلی راحت میتوان انجام داد و همان نتیجه را گرفت.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

پایان فصل دوم