بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ریاضی عمومی 2

تالیف : دکتر محمد مهدی ابراهیمی

ناشر : انتشارات دانشگاه پیام نور

گردآوری : واحد آموزشی انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ و تدوین : واحد فناوری انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل چهارم : بردار و هندسه تحلیلی

بردار : پاره خط جهت دار که دارای نقطه ی مبدا و انتهاست. طول پاره خط AB را اندازه ی بردار AB مینامیم و به صورت $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ نمایش می دهیم

هر بردار جبری در صفحه ی مختصات یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی است که x و y مؤلفه های بردار (x,y) نامیده می شوند.

اندازه ی بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$: $\Leftarrow$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ویژگی های بردارها : بردار ها را می توان جمع ، تفریق و ضرب در عددی اسکالر کرد.

قضیه : اگر a و b بردار های واقع بر یک صفحه باشند و a و b دو اسکالر باشند

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad : \quad \vec{0} = (0,0)$

3) $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$

4) $(ab)\vec{a} = a(b\vec{a})$

5) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

6) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

7) $(a+b)\vec{a} = a\vec{a} + b\vec{a}$

8) $0\vec{a} = \vec{0} = a\vec{0}$

9) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

تعریف : دو بردار a و b را موازی گوییم اگر اسکالر a وجود داشته باشد که $\vec{b} = a\vec{a}$

نکته : اگر a یک بردار ناصفر باشد آنگاه $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ است

نکته : هر سه تایی مرتب (x,y,z) را یک بردار در فضا می نامیم و بردارهای واحد آن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ به صورت $\vec{i} = (1,0,0)$ و $\vec{j} = (0,1,0)$ و $\vec{k} = (0,0,1)$ است.

ضرب عددی

جمع و تفریق و ضرب اسکالر بردار ها را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$
$$\vec{a}.\vec{b}=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$$

قضیه :

$$\vec{i}..\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$$
$$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$$
$$\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$$
$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$$
$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$
$$\vec{0}.\vec{a}=0$$

قضیه : اگر q زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos q$$

و اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشد :

$$\vec{a}.\vec{b}=0$$

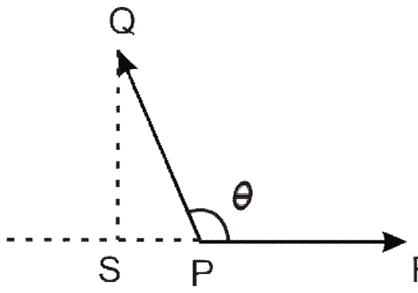
تعریف : زاویه های a و b و g در بازه $[0,p]$ به ترتیب بین بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روی محور مختصات و بردار ناصفر $\vec{a}$ را **زاویه های هادی** $\vec{a}$ می نامیم.

$$\cos a=\frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\frac{a_1}{|\vec{a}|}$$
$$\cos b=\frac{\vec{a}.\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|}=\frac{a_2}{|\vec{a}|}$$
$$\cos g=\frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a}=|\vec{a}|(\cos a\,\vec{i}+\cos b\,\vec{j}+\cos g\,\vec{k})$$

تصویر یک بردار روی بردار دیگر:

$\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ دو بردار و نقطه S تصویر قائم نقطه Q بر خطی که از P و R می گذرد می باشد.



همچنین مؤلفه $|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$ را **تصویر عددی** $\overrightarrow{PQ}$ در جهت $\overrightarrow{PR}$ می نامیم

$$|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|} = \overrightarrow{PQ}.\left(\frac{\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|}\right)$$

تعریف: اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد تصویر بردار $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

ضرب برداری

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

اگر بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دارای سه مؤلفه باشند ضرب برداری یا خارجی آن به صورت زیر است:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{vmatrix}$$

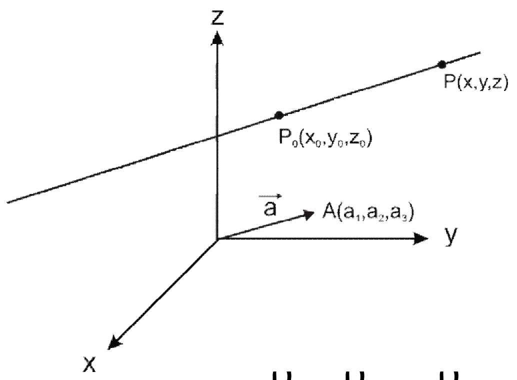
نکته: $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

قضیه

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$
2) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$
3) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$
4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$
5) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c})$
6) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$
7) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$
8) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$
9) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \quad \Leftarrow \quad$ a و b ناصفر و موازیند

خط در فضا :

خط L در فضا یا در صفحه توسط دو نقطه یا یک نقطه و بردار موازی با L مشخص می شود.
نقطه $p_0(x_0,y_0,z_0)$ بر خط L و بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ موازی با L رسم شده است.
در نتیجه نقطه $p(x,y,z)$ بر خط L است اگر و تنها اگر اسکالر t وجود داشته باشد
به طوری که $\vec{p_0p}=t\vec{a}$



معادله برداری خط L برابر است با :

$$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{a}$$

همچنین معادله پارامتری خط L برابر است با :

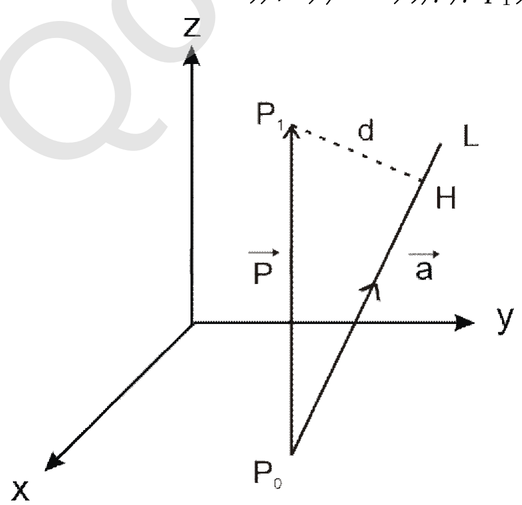
$$\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}$$

معادلات متقارن (دکارتی خط L) :

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

فاصله ی نقطه از خط :

خط L از نقطه p_0 می گذرد با بردار $\vec{a}$ موازی است و p_1 بر بردار L قرار ندارد



$$\begin{cases} d=\left|\overrightarrow{p_0p_1}\right|\sin\theta \\ \left|\vec a\times\overrightarrow{p_0p_1}\right|=\left|\vec a\right|\left|\overrightarrow{p_0p_1}\right|\sin\theta \end{cases} \quad\Rightarrow\quad d=\frac{\left|\vec a\times\overrightarrow{p_0p_1}\right|}{\left|\vec a\right|}$$

صفحه در فضا: تنها یک صفحه وجود دارد که از نقطه p می گذرد و بر خط L (بردار $\vec N$) عمود است.

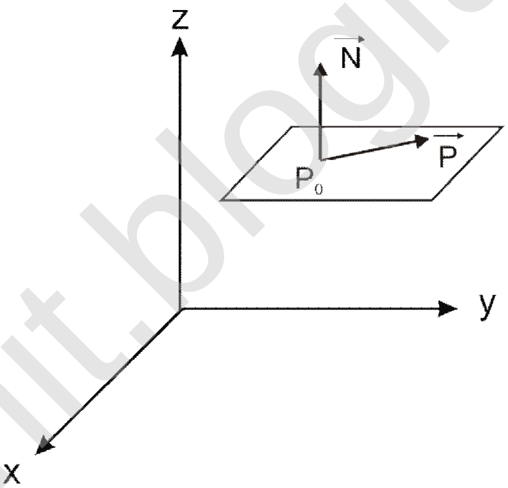
درنتیجه هر صفحه توسط یک نقطه و یک بردار عمود بر آن مشخص می شود

اگر $p_0(x,y,z)$ یک نقطه و $\vec N=(a,b,c)$ یک بردار ناصفر باشدواگر صفحه S از p_0 بگذرد و بر $\vec N$ عمود باشد آنگاه نقطه $p(x,y,z)$ بر این صفحه است اگر و تنها اگر بردار $\overrightarrow{p_0p}$ بر بردار $\vec N$ عمود باشد

درنتیجه : $\overrightarrow{p_0p}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$$\vec N.\overrightarrow{P_0P}=0 \quad\Rightarrow\quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow\quad ax+by+cz=d$$



تعریف : دو صفحه با بردارهای قائم $\vec N_1$ و $\vec N_2$ را موازی گوییم اگر $\vec N_1$ موازی با $\vec N_2$ و عمود می گوییم اگر $\vec N_1$ عمود بر $\vec N_2$ باشد.

در ضمن فاصله نقطه $p_0(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ از فرمول زیر بدست می آید

$$h=\frac{\left|\vec N.\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec N\right|} \quad\Rightarrow\quad h=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

پایان فصل چهارم