تمرینهای فصل ۴

تمرینهای ۱.۴

.۱

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۸,-۱۲)+(۵,۲۰)=(۱۳,۸)$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۸,-۱۲)-(۵,۲۰)=(۳,-۳۲)$$

.۲

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۴,۸,۴)+(۰,۵,۵\sqrt{۲})$$
$$=(۴,۱۳,۴+۵\sqrt{۲})$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۴,۸,۴)-(۰,۵,۵\sqrt{۲})$$
$$=(۴,۳,۴-۵\sqrt{۲})$$

.۳

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۲۰\vec{i}-۸\vec{j})+(۱۵\vec{i}+۵\sqrt{۲}\,\vec{j})$$
$$=۳۵\vec{i}+(۵\sqrt{۲}-۸)\vec{j}$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۲۰\vec{i}-۸\vec{j})-(۱۵\vec{i}+۵\sqrt{۲}\,\vec{j})$$
$$=۵\vec{i}-(۸+۵\sqrt{۲})\vec{j}$$

.۴

$$۴\vec{a}+۵\vec{b}=(۳۲\vec{i}+۴\vec{j})+(۵\vec{i}-۱۰\vec{k})$$
$$=۳۷\vec{i}+۴\vec{j}-۱۰\vec{k}$$
$$۴\vec{a}-۵\vec{b}=(۳۲\vec{i}+۴\vec{j})-(۵\vec{i}-۱۰\vec{k})$$
$$=۲۷\vec{i}+۴\vec{j}+۱۰\vec{k}$$

۵. بردار نمایشگر $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با $(۵-۱,۰-(-۴))=(۴,۴)$.

پس اندازهٔ آن برابر است با $\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$.

۶. بردار نمایشگر $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با $(-۲,-۱,-۲) = (-۱-۱,۱-۲,-۲-۰)$.
در نتیجه اندازهٔ آن برابر است با

$$\sqrt{(-۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$$

۷. چون $|\vec{a}|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$ ، بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ عبارت است از

$$\vec{u}=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{j}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{k}$$

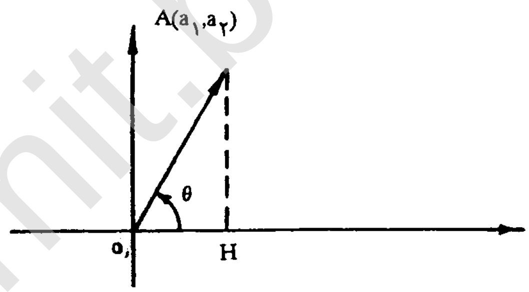
۸. داریم

$$|\vec{b}|=\sqrt{۷^۲+(۱۲\sqrt{۲})^۲+(-۱۲\sqrt{۲})^۲}$$
$$=\sqrt{۴۹+۲۸۸+۲۸۸}=\sqrt{۶۲۵}=۲۵$$

در نتیجه بردار واحد هم جهت با $\vec{b}$ برابر است با

$$\vec{u}=\frac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}=\frac{۱}{۲۵}\vec{b}=\frac{۷}{۲۵}\vec{i}+\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵}\vec{j}-\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۵}\vec{k}$$

۹. نمودار زیر را در نظر می‌گیریم



اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ ، آنگاه با توجه به مثلث قائم الزاویهٔ OAH ، داریم $a_۱=OH=OA\cos\theta=|\vec{a}|\cos\theta$ و $a_۲=AH=OA\sin\theta=|\vec{a}|\sin\theta$. پس ،

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$
$$=|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{i}+|\vec{a}|\sin\theta\,\vec{j}$$
$$=|\vec{a}|(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$$

۱۰. اگر $\vec{u}$ یک بردار واحد باشد، آنگاه $|\vec{u}|=۱$. بنابر تمرین ۹، داریم

$$\vec{u}=|\vec{u}|(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

تمرینهای ۲.۴

۱.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{2-3-4}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+9+16}}=\frac{-5}{\sqrt{87}}$$

۲.

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-2-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2+16+3}\sqrt{2+3+4}}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{3\sqrt{21}}$$

۳. چون

$$\vec{a}.\vec{b}=(2,1,-1).(3,7,13)=6+7-13=0$$
$$\vec{a}.\vec{c}=(2,1,-1).(20,-29,11)=40-29-11=0$$
$$\vec{b}.\vec{c}=(3,7,13).(20,-29,11)=60-203+143=0$$

پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دو به دو بر هم عمود هستند.

۴. چون $\vec{a}.\vec{b}=2+0+0=2$ و $|a|=\sqrt{4+1+4}=3$ ،

$$pr_{\vec{a}}\,\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}=\frac{2}{9}(2,1,-1)=\left(\frac{4}{9},\frac{2}{9},-\frac{2}{9}\right)$$

۵. داریم $\vec{i}.\vec{j}=(1,0,0).(0,1,0)=0$ و $\vec{j}.\vec{k}=(0,1,0).(0,0,1)=0$ ولی $\vec{j}\neq\vec{k}$.

۶. چون $|\cos\theta|\leq 1$ ، پس

$$|\vec{a}.\vec{b}|=\big|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta\,\big|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos\theta|\leq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

۷. اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ، آنگاه بنابر نامساوی کوشی ـ شوارتس، داریم $|\vec{a}.\vec{b}|^2\leq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$. در نتیجه

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

۸. با قراردادن $b_1=b_2=b_3=1$ در نامساوی تمرین ۷، داریم $(a_1+a_2+a_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(3)$ و در نتیجه

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\leq\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

۹. داریم

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})\\ &= \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\\ &\leq |\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\,|\vec{b}|+|\vec{b}|^2 \qquad \text{(کوشی ـ شوارتس)}\\ &= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2\end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

۱۰. چون

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) &= \vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\\ |\vec{a}-\vec{b}| = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

در نتیجه $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}| = 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$.

۱۱. چون

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

پس $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$.

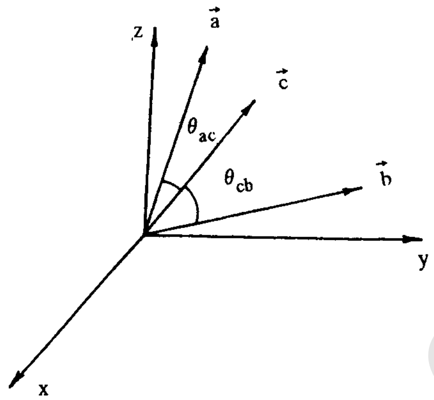
۱۲. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک متوازی الاضلاع باشند، آنگاه با توجه به شکل ۴.۲.۴ متن کتاب $|\vec{a}+\vec{b}|$ و $|\vec{a}-\vec{b}|$ اندازهٔ دو قطر این متوازی‌الاضلاع هستند. چون $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$ پس $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ اگر و تنها اگر $\vec{a}.\vec{b} = 0$. یعنی اگر و تنها اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

۱۳. داریم

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

۱۴. فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع یک لوزی باشند. در این صورت $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ دو قطر آن هستند (شکل ۴.۲.۴ متن کتاب را ببینید)، چون $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ، پس $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 = 0$ درنتیجه دو قطر لوزی بر هم عمود هستند.

۱۵. فرض کنیم θ_{ac} و θ_{cb} به ترتیب زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{c}$ و زاویهٔ بین $\vec{c}$ و $\vec{b}$ باشند (شکل ۲.۱.۴ را ببینید).



شکل ۲.۱.۴

چون

$$\vec{a}.\vec{c}=\vec{a}.(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})$$
$$=|\vec{b}|\vec{a}.\vec{a}+|\vec{a}|\vec{a}.\vec{b}$$
$$=|\vec{b}|\ |\vec{a}|^{۲}+|\vec{a}|\vec{a}.\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|(|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b})$$

و به همین ترتیب $\vec{b}.\vec{c}=|\vec{b}|(\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|)$، داریم

$$\cos\theta_{ac}=\frac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}=\frac{|\vec{a}|(|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|}$$
$$=\frac{|\vec{a}|\ |\vec{b}|+\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{c}|}$$
$$\cos\theta_{cb}=\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|}=\frac{|\vec{b}|(\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|)}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|}$$
$$=\frac{\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}|\ |\vec{b}|}{|\vec{c}|}$$
$$=\cos\theta_{ac}$$

چون θ_{ac} و θ_{cb} در بازهٔ $[۰,\pi]$ قرار دارند، پس $\theta_{ac}=\theta_{cb}$.

۱۶. داریم

$$\cos\gamma=\frac{a_۳}{|\vec{a}|}\ ،\quad \cos\beta=\frac{a_۲}{|\vec{a}|}،\ \cos\alpha=\frac{a_۱}{|\vec{a}|}$$

پس

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=\frac{a_{۱}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}+\frac{a_{۲}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}+\frac{a_{۳}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}$$

$$=\frac{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}=\frac{|\vec{a}|^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}=۱$$

تمرینهای ۳.۴

.۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(-۱,-۳,۴).(۱,-۱,۱)=-۱+۳+۴=۶$$

.۲

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & -۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(۱,۱,-۱).(-۱,۲,-۱)=-۱+۲+۱=۲$$

.۳

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۳ & ۴ & ۱۲\\ ۳ & ۴ & -۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴ & ۱۲\\ ۴ & -۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳ & ۱۲\\ ۳ & -۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-۹۶\vec{i}+۷۲\vec{j}$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=(\frac{۱}{۸},-\frac{۱}{۱۲},\frac{۱}{۱۶}).(-۹۶,۷۲,۰)=-۱۲-۶+۰=-۱۸$$

.۴

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۳ & ۴ & ۱۲\\ ۳ & ۴ & ۱۲\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۴ & ۱۲\\ ۴ & ۱۲\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۳ & ۱۲\\ ۳ & ۱۲\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۲ & ۴\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(۰,۰,۰)$$

$$\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{c}.\vec{۰}=۰$$

۵. چون $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta_{ab}$ پس

$$\sin\theta_{ab}=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{|-\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}|}{|\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}|\,|\vec{i}-\vec{k}|}$$

$$=\frac{\sqrt{۱+۴+۱}}{\sqrt{۱+۱+۱}\sqrt{۱+۰+۱}}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=۱$$

۶. به آسانی دیده می‌شود که

$$\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ \\ x_۱ & x_۲ \end{vmatrix}$$

پس اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، آنگاه

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ a_۲ & a_۳ \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ a_۱ & a_۳ \end{vmatrix}\vec{j} - \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ a_۱ & a_۲ \end{vmatrix}\vec{k} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \end{vmatrix} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

۷. فرض کنیم $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ و $\vec{c}=(c_۱,c_۲,c_۳)$. داریم

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(b_۲c_۳-c_۲b_۳)\vec{i}-(b_۱c_۳-c_۱b_۳)\vec{j}+(b_۱c_۲-c_۱b_۲)\vec{k}$$

مؤلفهٔ اول $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر است با

$$\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ c_۱b_۳-b_۱c_۳ & b_۱c_۲-c_۱b_۲ \end{vmatrix} = a_۲b_۱c_۲-a_۲c_۱b_۲-a_۳c_۱b_۳+a_۳b_۱c_۳$$

و مؤلفهٔ اول $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ برابر است با

$$(a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳)b_۱-(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)c_۱=a_۲c_۲b_۱+a_۳c_۳b_۱-a_۲b_۲c_۱-a_۳b_۳c_۱$$

که همان مؤلفهٔ اول $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های دوم و سوم این دو بردار یکسان هستند.

۸. داریم

$$\begin{aligned}(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)&=(\vec a+\vec b)\times\vec a-(\vec a+\vec b)\times\vec b\\&=(\vec a\times\vec a)+(\vec b\times\vec a)-(\vec a\times\vec b)-(\vec b\times\vec b)\\&=(\vec b\times\vec a)+(\vec b\times\vec a)\\&=۲(\vec b\times\vec a)=۲\vec b\times\vec a\end{aligned}$$

۹. فرض کنیم $\vec a=(۱,۰,۰)$، $\vec b=(۰,۱,۰)$ و $\vec c=(۱,۱,۰)$. در این صورت

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ ۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\end{vmatrix}=\vec k،\vec a\times\vec c=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ ۱&۰&۰\\ ۱&۱&۰\end{vmatrix}=\vec k$$

ولی $\vec b\neq\vec c$.

۱۰. با توجه به تمرین ۷، داریم

$$\begin{aligned}\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)&=(\vec a.\vec c)\vec b-(\vec a.\vec b)\vec c\\&+(\vec b.\vec a)\vec c-(\vec b.\vec c)\vec a+(\vec c.\vec b)\vec a-(\vec c.\vec a)\vec b=۰\end{aligned}$$

زیرا $\vec x\,.\,\vec y=\vec y\,.\,\vec x$.

۱۱. (الف) بردار $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ عمود بر صفحهٔ داده شده است. چون $\overrightarrow{PQ}=(-۱,۴,-۳)$ و $\overrightarrow{PR}=(۲,-۳,-۱)$، پس

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ -۱&۴&-۳\\ ۲&-۳&-۱\end{vmatrix}=-۱۳\vec i-۷\vec j-۵\vec k$$

(ب) مساحت مثلث PQR برابر است با

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶۹+۴۹+۲۵}}{۲}=\frac{\sqrt{۲۴۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۲.با توجه به مسألهٔ نمونه‌ای ۱۱.۳.۴، چون

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR})&=(۱,-۱,۲).[(۰,۳,-۱)\times(۳,-۴,۱)]\\&=(۱,-۱,۲).\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ ۰&۳&-۱\\ ۳&-۴&۱\end{vmatrix}\\&=۱\begin{vmatrix}۳&-۱\\-۴&۱\end{vmatrix}-(-۱)\begin{vmatrix}۰&-۱\\ ۳&۱\end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix}۰&۳\\ ۳&-۴\end{vmatrix}\\&=-۱+۳-۱۸=-۱۶\end{aligned}$$

پس حجم این متوازی السطوح برابر با ۱۶ است.

تمرینهای ۴.۴

۱. معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از:

$$x = -۲ + ۳t\ ,\ y = ۱ - t\ ,\ z = ۵t$$

و معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند

$$\frac{x+۲}{۳} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z}{۵}$$

۲. این معادلات به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۱۱t\ ,\ y = -۱۳t\ ,\ z = -۱۵t$$

$$\frac{x}{۱۱} = \frac{y}{-۱۳} = \frac{z}{-۱۵}$$

۳. معادلات مورد نظر به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = -۳ + t\ ,\ y = ۶ - t\ ,\ z = ۲$$

$$x + ۳ = \frac{y-۶}{-۱}\ ,\ z = ۲$$

۴. این معادلات به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۲\ ,\ y = ۲t\ ,\ z = ۵ + ۳t$$

$$x = ۲\ ,\ \frac{y}{۲} = \frac{z-۵}{۳}$$

۵. این خط از نقطهٔ $P_۱$ می‌گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲}=(-۳,۸,-۳)$ موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری و متقارن آن به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x = ۵ - ۳t\ ,\ y = -۲ + ۸t\ ,\ z = ۴ - ۳t$$

$$\frac{x-۵}{-۳} = \frac{y+۲}{۸} = \frac{z-۴}{-۳}$$

۶. این خط از نقطهٔ $P_۱\ (-۱,۱,۰)$ می‌گذرد و با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۰,۴,۷)$ موازی است. بنابراین معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$x = -۱\ ,\ \frac{y-۱}{۴} = \frac{z}{۷}$$

۷. این خط موازی با بردار $\vec{a}=(۴,۲,۱)$ است. پس معادلات متقارن آن به صورت زیر هستند.

$$\frac{x-۳}{۴} = \frac{y+۱}{۲} = z - ۲$$

۸. خطی که از دو نقطهٔ $P_1(۰,۰,۵)$ ، $P_2(۱,-۱,۴)$ می‌گذرد با بردار $\overrightarrow{P_1P_2}=(۱,-۱,-۱)$ موازی است. خط $\frac{z+۹}{۳}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{x}{۷}$ با بردار $\vec{a}=(۷,۴,۳)$ موازی است. چون

$$\vec{a}.\overrightarrow{P_1P_2}=(۷,۴,۳).(۱,-۱,-۱)=۷-۴-۳=۰$$

این دو خط بر هم عمود هستند.

۹. بردار $\vec{a}=(-۳,۸,-۳)$ موازی با خط داده شده در تمرین ۵ است. چون $\overrightarrow{P_1P_0}=(۵,۰,-۴)-(۵,-۲,۴)=(۰,۲,-۸)$ ، داریم

$$\vec{a}\times\overrightarrow{P_1P_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -۳ & ۸ & -۳\\ ۰ & ۲ & -۸\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۸ & -۳\\ ۲ & -۸\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-۳ & -۳\\ ۰ & -۸\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-۳ & ۸\\ ۰ & ۲\end{vmatrix}k$$

$$=-۵۸\vec{i}-۲۴\vec{j}-۶\vec{k}$$

در نتیجه

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{۳۳۶۴+۵۷۶+۳۶}}{\sqrt{۹+۶۴+۹}}=\frac{\sqrt{۳۹۷۶}}{\sqrt{۸۲}}=\frac{۲\sqrt{۴۹۷}}{\sqrt{۴۱}}$$

۱۰. بردار $\vec{a}=(۰,۱,۱)$ موازی با این خط است و نقطهٔ $P_0(-۲,-۱,۰)$ روی خط قرار دارد. چون $\overrightarrow{P_0P_1}=(۴,۲,۰)$ ، داریم

$$\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۴ & ۲ & ۰\end{vmatrix}=-۲\vec{i}+۴\vec{j}-۴\vec{k}$$

در نتیجه

$$d=\frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{\sqrt{۰+۱+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

۱۱. این دو خط وقتی یکدیگر را قطع می‌کنند که دستگاه سه معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases}۱+۲t=۴-s\\ ۱-۴t=-۱+۶s\\ ۵-t=۴+s\end{cases}$$

دارای جواب باشد. با حل کردن دستگاه دو معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم که $t=۲$ و $s=-۱$. چون این مقادیر در معادلهٔ سوم نیز صدق می‌کنند، پس جواب این دستگاه هستند. با قرار دادن $t=۲$ در معادلات پارامتری خط اول، نقطهٔ مشترک این دو خط برابر $(۵,-۷,۳)$ به دست می‌آید.

۱۲. این دو خط وقتی متقاطع هستند که دستگاه

$$\begin{cases} ۳+t=۴-s \\ ۳+۲t=۳+s \\ t=-۲+۳s \end{cases}$$

جواب داشته باشد. با حل کردن دستگاه دو معادلهٔ اول، مقادیر $t=\frac{۱}{۳}$ و $s=\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آیند. چون این مقادیر در معادلهٔ سوم صدق نمی‌کنند، دستگاه فوق جواب ندارد. در نتیجه دو خط داده شده متقاطع نیستند.

۱۳. بردارهای $\vec{a}=(۲,-۴,-۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۶,۱)$ به ترتیب موازی با دو خط داده شده هستند. پس کسینوس زاویهٔ بین این دو خط برابر است با

$$\cos\theta_{ab}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-۲-۲۴-۱}{\sqrt{۴+۱۶+۱}\sqrt{۱+۳۶+۱}}=\frac{-۲۷}{\sqrt{۷۹۸}}$$

۱۴. بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۳)$ به ترتیب موازی با این دو خط هستند. پس

$$\cos\theta_{ab}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-۱+۲+۳}{\sqrt{۱+۴+۱}\sqrt{۱+۱+۹}}=\frac{۴}{\sqrt{۶۶}}$$

تمرینهای ۵.۴

۱. معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۴(x+۱)+۱۵(y-۲)-\frac{۱}{۲}(z-۳)=۰$ یا $-۴x+۱۵y-\frac{۱}{۲}z-۳۲\frac{۱}{۲}=۰$ یا $۸x-۳۰y+z+۶۵=۰$.

۲. معادلهٔ این صفحه به صورت زیر است:

$۲(x-\pi)+۳(y-۰)-۴(z+\pi)=۰$ یا $۲x+۳y-۴z=۶\pi$.

۳. داریم $\overrightarrow{P_۰P_۱}=(۳,۴,۱)$ و $\overrightarrow{P_۰P_۲}=(۰,۵,-۱)$ و در نتیجه

$$\vec{N}=\overrightarrow{P_۰P_۱}\times\overrightarrow{P_۰P_۲}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{vmatrix}=-۹\vec{i}+۳\vec{j}+۱۵\vec{k}$$

پس معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۹(x-۲)+۳(y+۱)+۱۵(z-۴)=۰$ یا $۹x-۳y-۱۵z+۳۹=۰$.

۴. خط داده شده با بردار $\vec{a}=(۱,۱,۲)$ موازی است و از نقطهٔ $P_۱(-۲,-۱,-۵)$ می‌گذرد. در نتیجه بردار $\vec{N}=\vec{a}\times\overrightarrow{P_۰P_۱}$ قائم بر صفحهٔ مورد نظر است. چون $\overrightarrow{P_۰P_۱}=(-۳,۰,-۷)$ و در نتیجه

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۰ & -۷ \end{vmatrix} = -۷\vec{i}+\vec{j}+۳k$$

معادلهٔ این صفحه عبارت است از $-۷(x-۱)+(y+۱)+۳(z-۲)=۰$ یا $۷x-y-۳z=۲$.

۵. بردار $\vec{N}=(۲,۵,۹)$ که با خط داده شده موازی است، قائم بر صفحهٔ مورد نظر است. بنابراین معادله این صفحه عبارت است از $۲(x-۲)+۵(y-\frac{۱}{۲})+۹(z-\frac{۱}{۳})=۰$ یا $۴x+۱۰y+۱۸z=۱۹$.

۶. خط مورد نظر با بردار قائم $\vec{N_۲}=(۲,-۳,۴)$ بر صفحهٔ داده شده، موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری این خط عبارت‌اند از:

$$x=۲+۲t\,,\ y=-۱-۳t\,,\ z=۴t$$

۷. با قرار دادن $z=۰$ در معادلات دو صفحهٔ داده شده، نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ از خط l به دست می‌آید. بردارهای قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارت‌اند از $\vec{N_۱}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{N_۲}=(۲,-۳,۴)$. خط l با بردار

$$\vec{N_۱}\times\vec{N_۲}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & -۳ & ۴ \end{vmatrix} = -۳\vec{i}-۶\vec{j}-۳\vec{k}$$

موازی است. در نتیجه معادلات پارامتری l عبارت‌اند از:

$$x=۱-۳t\,,\ y=-۶t\,,\ z=-۳t$$

۸. معادلات پارامتری خط داده شده عبارت‌اند از:

$$x=-۱+۲t\,,\ y=-۳+۳t\,,\ z=-t$$

این عبارتها را به جای x، y و z در معادلهٔ $۲x-۳y+۴z=۲$ قرار می‌دهیم و آن را نسبت به t حل می‌کنیم. داریم $۲(-۱+۲t)-۳(-۳+۳t)-۴t=۲$ و در نتیجه $t=\frac{۵}{۹}$. پس نقطهٔ تلاقی این خط و صفحه برابر $(-\frac{۵}{۹}\,,-\frac{۴}{۳}\,,-\frac{۱}{۹})$ است.

۹. فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ داده شده برابر است با

$$h=\frac{|۶+۱+۴-۵|}{\sqrt{۹+۱+۴}}=\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۳\sqrt{۱۴}}{۷}$$

۱۰. دو بردار قائم بر این دو صفحه به ترتیب عبارت‌اند از $\vec{N_۱}=(۲,-۳,۴)$ و $\vec{N_۲}=(۴,-۶,۸)$. چون $\vec{N_۲}=۲\vec{N_۱}$، این دو بردار، و در نتیجه دو صفحهٔ داده شده، موازی یکدیگر هستند.

۱۱. با حل کردن دستگاه

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ y+z=۲ \\ x+z=۳ \end{cases}$$

نقطهٔ تلاقی این سه صفحه برابر با $(۱,۰,۲)$ به دست می‌آید.