بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِیمِ

از سری جزوات آموزشی:

# ریاضی عمومی 2

تالیف : دکتر محمد مهدی ابراهیمی

ناشر : انتشارات دانشگاه پیام نور

گردآوری : واحد آموزشی انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ و تدوین : واحد فناوری انجمن علمی پژوهشی فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

# فصل پنجم : جبر خطی

بردار : هر n تایی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را یک بردار سطری و هر $x_i$ را یک مولفه می نامند.

بردارها خاصیت جمع و ضرب اسکالر و عضو خنثی و قرینه و شرکت پزیری و تعویض پزیری جمع دارند.

طول یا اندازه ی بردار: $|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

ویژگی $|u+v| \le |u| + |v|$

ماتریس : هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که به صورت زیر است را یک ماتریس m در n

(m سطری وn ستونی) می نامیم.هر $a_{ij}$ یک درایه یا عنصر نامیده می شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

انواع ماتریس : مربعی،صفر،قطری،همانی و...

تعریف: $A = (a_{ij})_{m\times p}$ و $B = (b_{ij})_{p\times n}$ دو ماتریس باشد حاصلضرب A در B برابر است با

$$AB = C = (C_{ij})_{m\times n}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$i = 1,2,\ldots.,m$$

$$j = 1,2,\ldots.,n$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots.. + a_{ip}b_{pj}$$

ماتریس ترانهاده$(A^T)$ :

$$a_{ij} = b_{ij} \Leftarrow A^T = b_{ij} \Leftarrow A = (a_{ij})_{m\times n}$$

ماتریس متقارن : ماتریس مربعی A را متقارن گوییم اگر $A = A^T$

دترمینان ماتریس $2\times 2$ :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = ad - bc$$

همسازه : برای هر $a_{ij}$ در ماتریس

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}$$
$$M_{ij} = A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n}\begin{Bmatrix} i = 1,2,...,n \\ j = 1,2,....,n \end{Bmatrix}$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + .... + a_{in}A_{in}$$

یا

$$\det A = a_{j1}A_{1J} + .... + a_{jn}A_{jn}$$

روش دترمینان $A_{n\times n}$ : یک سطر یا ستون را انتقاب می کنیم هر عنصر این سطر یا ستون را در همسازه اش ضرب و سپس مقادیر بدست آمده را باهم جمع می کنیم.

-ویژگی دترمینان = قضیه ها صفحه ی 214

-حجم متوازی السطوح = قدر مطلق دترمینان = $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

وارون ماتریس (نامنفرد):ماتریس مربعی A را وارونپزیر گوییم اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد به طوری که AB=BA=I (وارون یکتاست)

$1)(A^{-1})^{-1} = A$

$2)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$3)(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

اعمال سطری مقدماتی

الف)تعویض دو سطر یک ماتریس

ب)ضرب کردن یک سطر ماتریس در یک عدد ناصفر

ج)افزودن مضربی از یک سطر بر سطر دیگر

ماتریس الحاقی : ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را با adj A نشان و $adjA = (A_{ij})^{T}$ تعریف می کنیم.adj A ترانهاده ماتریس همسازه های A است.

قضیه: $A(adjA) = (adjA)A = (\det A)I_n$

$\det A \neq 0$

نتیجه: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$

ماتریس $2\times2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

همسازه $A\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

الحاقی $adjA\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

وارون $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

## دستگاه معادلات خطی:

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

دستگاه m معادله خطی n مجهولی

روش حذفی گاوس:

1) ضرب یک عدد غیر صفر در یک معادله

2) عوض کردن ترتیب معادله

3) افزودن مضربی از یک معادله به معادله ی دیگر

روش کرامر:

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}, \dots\dots, x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

## نمایش ماتریسی یک دستگاه:

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A یک ماتریس $n \times n$ وارونپزیر باشد — این دستگاه جواب منحصر به فردی دارد.

استقلال و وابستگی خطی : مجموعه $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ از فضای برداری $R^n$ دارای استقلال خطی است اگرهیچ مجموعه ای از اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_k$ بجز $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ وجود نداشته باشد بطوریکه $a_1u_1 + \ldots + a_ku_k = (0, \ldots, 0)$ درغیر این صورت مجموعه u دارای وابستگی خطی است(دارای بیش از یک جواب ناصفر)

* هر زیر مجموعه از که دارای بیش n عضو باشد وابستگی خطی دارد.

-هر مجموعه n عضوی در $R^n$ را که دارای استقلال خطی باشد یک پایه و n را بعد فضای برداری $R^n$ می نامیم.

-برای هر عدد طبیعی n مجموعه ی n عضوی پایه ای برای $R^n$ است.این پایه را پایه ی متعارف $R^n$ می خوانیم.

## ماتریس تغییر مختصات:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

رابطه مختصات جدید با مختصات قدیم نقطه ی P

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تبدیل خطی و بردار ویژه:

فرض کنیم V و W دو فضای برداری ($R^n$ و $R^m$)باشند $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی است اگر

1)اگر به ازای هر دو بردار T(u+v)=T(u)+T(v)

2)به ازای هر بردار u در v و هر اسکالر $T(au) = aT(u), a$

A را ماتریس نمایشگر T (نسبت به پایه های متعارف)می نامیم.

$$\begin{Bmatrix} T: R^n \rightarrow R^m \\ T(x) = Ax \end{Bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, T\begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \\ : \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

اگر $l$ یک مقدار ویژه T و x را یک بردار ویژه T متناظر با مقدار ویژه $l$ می نامیم.تبدیل خطی T از $R^n$ به روی خودش تعریف شده باشد. $T(x) = lx \Leftarrow$

تذکر:ماتریس A نمایشگر تبدیل خطی $T: R^n \rightarrow R^n$ باشد و $l$ یک مقدار ویژه T است.بردار ناصفر X در $R^n$ وجود دارد بطوریکه

$$lX = T(x) \Rightarrow lX = AX \Rightarrow (lI - A)X = 0$$

$\Rightarrow |lI - A| = 0$ معادله جواب ناصفری چون X دارد.

چند جمله ای $f(x) = |xI - A|$ ریشه هایش مقادیر ویژه ی تبدیل خطی T هستند.چند جمله ای ویژه T (چند جمله ای ویژه A )می نامیم.

پایان فصل پنجم