

## LÝ THUYẾT DANH MỤC ĐẦU TƯ

Nhà đầu tư thiết lập danh mục đầu tư ( $P$ ) trên cơ sở xem xét suất sinh lợi kỳ vọng và phương sai (hay độ lệch chuẩn) của suất sinh lợi.

### I. Xác định đường tập hợp các cơ hội đầu tư vào các tài sản rủi ro

1. Tài sản rủi ro:  $1, 2, \dots, N$ .

- ✓ Tài sản  $i$  có suất sinh lợi kỳ vọng:  $\bar{r}_i$
- ✓ Suất sinh lợi của tài sản  $i$  có phương sai:  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
- ✓ Đồng phương sai (tích sai) giữa suất sinh lợi của tài sản  $i$  và  $j$ :  $\sigma_{ij}$
- ✓ Tỷ lệ đầu tư vào các tài sản:  $w_1, w_2, \dots, w_N$ .

2. Ta có thể biểu diễn các công thức trên dưới dạng ma trận.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \dots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix}; \quad \Delta = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Tổng của các trọng số là 100%: 
$$\sum_{i=1}^N w_i = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục: 
$$\sum_{i=1}^N w_i \bar{r}_i = [\bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \dots \quad \bar{r}_N] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = \bar{r}_p$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix} = \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} = \sigma_p^2$$

3. Đối với mỗi suất sinh lợi kỳ vọng nhất định theo yêu cầu, nhà đầu tư muốn xây dựng một danh mục sao cho phương sai của suất sinh lợi có giá trị nhỏ nhất.

Vậy, nhà đầu tư muốn tối thiểu hóa  $\sigma_p^2 = \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W}$  trên cơ sở thỏa mãn các ràng buộc:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1 \quad (1) \quad \text{và} \quad \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = \bar{r}_p \quad (2)$$

Ta có phương trình Lagrangian sau đây:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} + \lambda(1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}) + \gamma(\bar{r}_p - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}) \quad (3)$$

Điều kiện cần của tối thiểu hóa:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \Delta \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1} - \gamma \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)-$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 0 \end{cases} \quad (5)-$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \bar{r}_p - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = 0 \end{cases} \quad (6)-$$

Từ (4), ta có các tỷ trọng tài sản tối ưu:

$$\mathbf{W}^* = \lambda \Delta^{-1} \mathbf{1} + \gamma \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} \quad (7)$$

Thế (7) vào (5) và (6) ta được hệ phương trình với hai ẩn số là  $\lambda$  và  $\gamma$ :

$$\begin{cases} (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) \lambda + (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \gamma = 1 \\ (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) \lambda + (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \gamma = \bar{r}_p \end{cases}$$

Đặt  $A = \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}$ ;  $B = \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}$ ;  $C = \bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}$ ; và  $D = AC - B^2$ . Ta có:

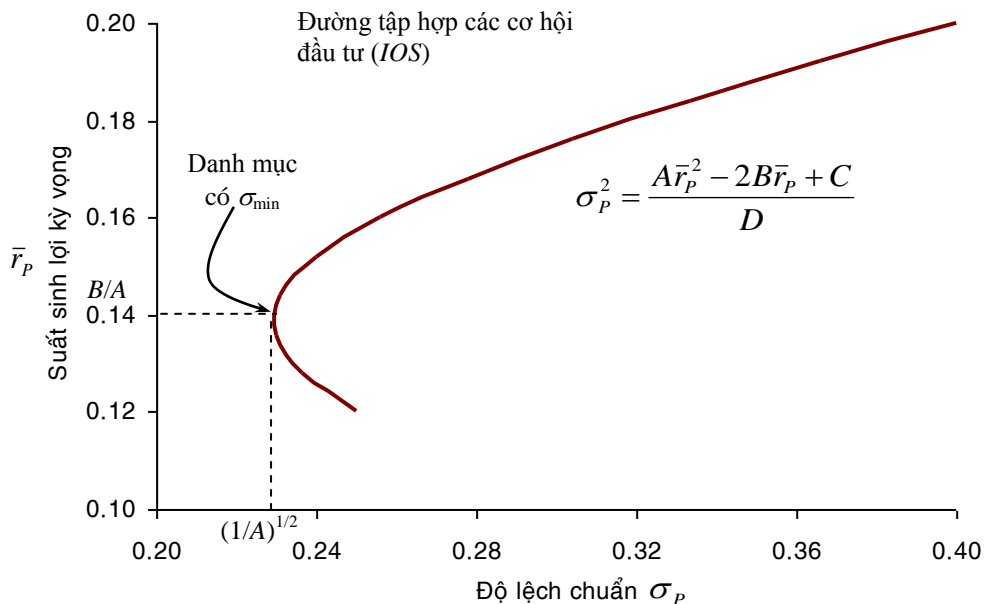
$$\begin{cases} A\lambda + B\gamma = 1 \\ B\lambda + C\gamma = \bar{r}_p \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{C - B\bar{r}_p}{D} \quad \text{và} \quad \gamma = \frac{A\bar{r}_p - B}{D}$$

Phương trình phương sai của suất sinh lợi danh mục đầu tư:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \Delta (\lambda \Delta^{-1} \mathbf{1} + \gamma \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \\ &= \lambda \mathbf{W}^T \mathbf{1} + \gamma \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{R}} \\ &= \lambda + \gamma \bar{r}_p \end{aligned}$$

4. Phương trình đường tập hợp các cơ hội đầu tư:

$$\sigma_p^2 = \frac{A\bar{r}_p^2 - 2B\bar{r}_p + C}{D} \quad (8)$$



## II. Xây dựng danh mục đầu tư với $N$ tài sản rủi ro và tài sản phi rủi ro

1. Tài sản phi rủi ro có suất sinh lợi  $r_f$ . Tỷ lệ đầu tư vào tài sản phi rủi ro:  $w_0$   
Tỷ lệ đầu tư vào các tài sản rủi ro:  $w_1, w_2, \dots, w_N$

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_N = 1 \quad \text{hay} \quad w_0 + \mathbf{1}^T \mathbf{W} = 1 \quad \text{hay} \quad w_0 = 1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục:

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= r_f w_0 + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} = r_f (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{W}) + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W} \\ \bar{r}_p &= r_f + (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{W} \end{aligned} \quad (9)$$

2. Đối với mỗi suất sinh lợi kỳ vọng nhất định theo yêu cầu, nhà đầu tư muốn xây dựng một danh mục sao cho phương sai của suất sinh lợi có giá trị nhỏ nhất.

Vậy, nhà đầu tư muốn tối thiểu hóa  $\sigma_p^2 = \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W}$  trên cơ sở thỏa mãn ràng buộc (9).

Phương trình Lagrangian:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} + \gamma [\bar{r}_p - r_f - (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \mathbf{W}] \quad (10)$$

Điều kiện cần của tối thiểu hóa:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \Delta \mathbf{W} - \gamma (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (11)$$

Các tỷ trọng tài sản rủi ro tối ưu:

$$\mathbf{W}^* = \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \quad (12)$$

Thế (7) vào (9):

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= r_f + (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})^T \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \\ \bar{r}_p - r_f &= \gamma [(\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}}) + (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) r_f^2 - 2(\bar{\mathbf{R}}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) r_f] = \gamma (A r_f^2 - 2B r_f + C) \end{aligned}$$

Vậy:

$$\gamma = \frac{\bar{r}_p - r_f}{A r_f^2 - 2B r_f + C} \quad (13)$$

3. Phương trình phương sai của suất sinh lợi danh mục đầu tư:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \Delta [\gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})] \\ &= \gamma \mathbf{W}^T (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \\ &= \gamma (\bar{r}_p - r_f) \end{aligned} \quad (14)$$

4. Đường thị trường vốn:

Thế (13) và (14) rồi rút gọn, ta được:

$$\sigma_p = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sqrt{A r_f^2 - 2B r_f + C}} \quad (15)$$

Đường thị trường vốn (*CML*) là một tia đi từ vị trí của tài sản phi rủi ro và tiếp xúc với đường *IOS* tại một danh mục có tên gọi là danh mục tiếp xúc *T*.

### 5. Xác định danh mục tiếp xúc *T*

*T* vừa nằm trên *CML* vừa nằm trên *IOS*. *T* không chứa tài sản phi rủi ro nên ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \mathbf{W}_t &= 1 \quad \text{và} \quad \mathbf{W}_t = \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) \quad [\text{từ phương trình (12)}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{1}^T \gamma \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}) = 1 \\ &\Rightarrow \gamma (\mathbf{1}^T \Delta^{-1} \bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1}^T \Delta^{-1} \mathbf{1}) = 1 \\ &\Rightarrow \gamma = (B - Ar_f)^{-1} \end{aligned}$$

Vậy,

$$\mathbf{W}_t = (B - Ar_f)^{-1} \Delta^{-1} (\bar{\mathbf{R}} - r_f \mathbf{1})$$

Suất sinh lợi kỳ vọng của danh mục *T*:

$$\bar{r}_t = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}_t = \frac{C - Br_f}{B - Ar_f}$$

Phương sai của suất sinh lợi của danh mục *T*:

$$\sigma_t^2 = \mathbf{W}_t^T \Delta \mathbf{W}_t = \frac{\bar{r}_t - r_{ft}}{B - Ar_f}$$

### 5. Danh mục tối ưu, *P*

Nhà đầu tư sẽ chọn danh mục đầu tư tối ưu bằng cách đầu tư một phần tiền vào danh mục tiếp xúc *T* và phần còn lại vào tài sản phi rủi ro tùy theo sở thích của mình về sự đánh đổi giữa suất sinh lợi kỳ vọng và rủi ro.

